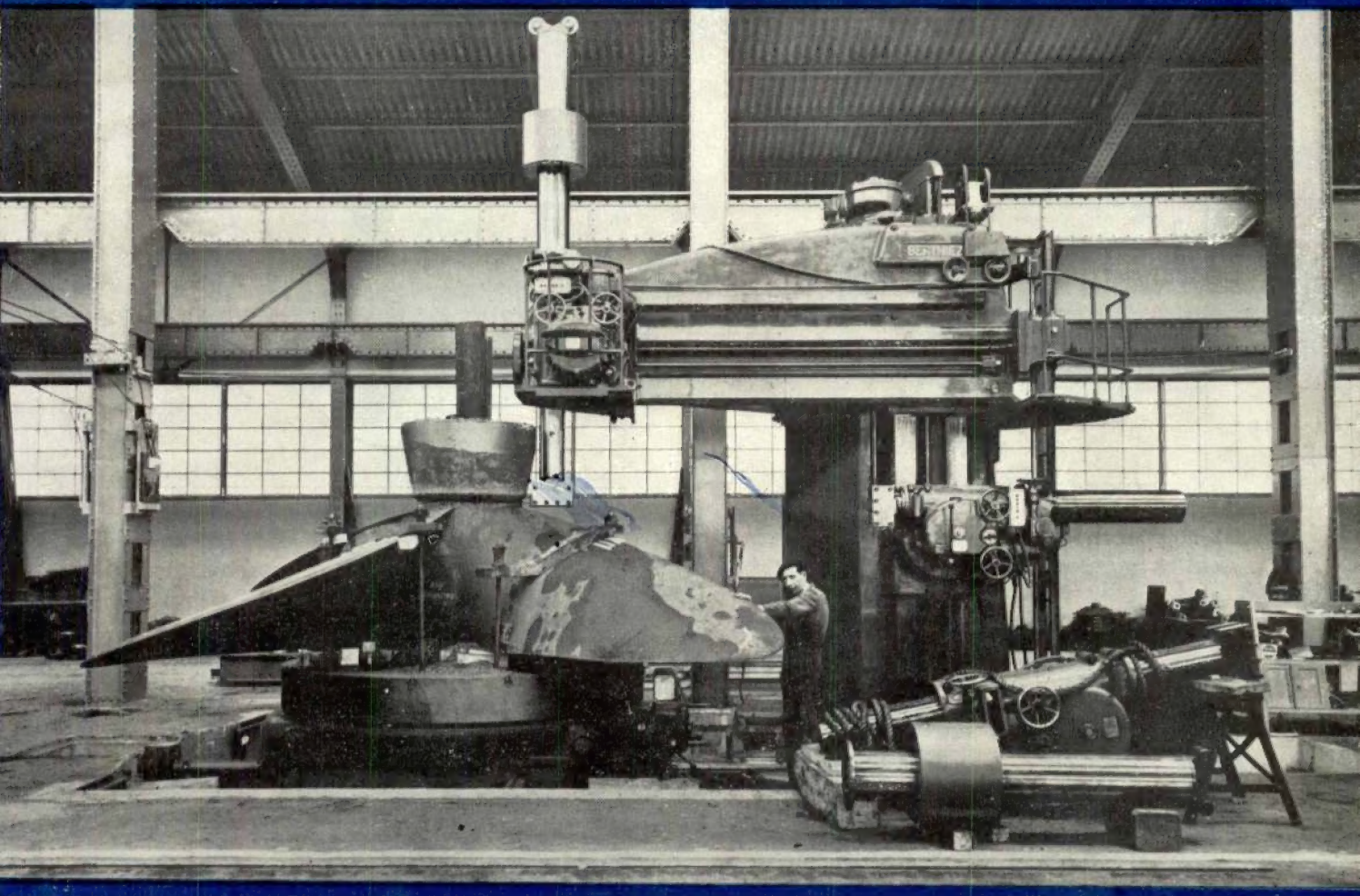
TÉCNICA



REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 202 - Maio - 1950

CIMENTO

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.
Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.
Barricas de 180 Kg.

S E C I L

COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO
RUA DO COMÉRCIO, 56, 3.°
LISBOA

Mais quilometragem
Mais comodidade
Mais segurança

Cimento «Liz» hidrofugado «N»

PRÓPRIO PARA

IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS

REBOCOS, FUNDAÇÕES, PAREDES, ETC.

Substitue com vantagem de ordem técnica e económica todos os impermeabilizadores conhecidos.

Em sacos de papel de 50 quilos

Peçam instruções para o seu emprêgo

Sede: Rua do Cais de Santarém, 64, 1.° — LISBOA
Filial: Rua de Santo António, 190-A, 1.° — PORTO

Agentes em todo o País

NÚMERO
202
Maio — 1950

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N./ TEL. 7 0144 (linha 50)

DIRECTOR
JOSÉ MARIA AVILLEZ
ADMINISTRADOR
LUÍZ DA CUNHA FERRAZ
SECRETÁRIO
MANUEL MARQUES MAIA
BIBLIOTECÁRIA
MARIA HELENA PORTUGAL DA SILVEIRA
CORPO REDACTORIAL
ARMANDO COUTINHO DE LENCASTRE
JÚLIO FERREIRA LOPES
MARGELINO ABREU COSTA
HENRIQUE CANALES PEREIRA

NÚMERO AVULSO 9$00
ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	25$00	45$00	85$00
Colónias Portuguesas e Estrangeiro	—	50$00	90$00

EDITOR E PROPRIETARIO
ASS. DOS ESTUD. DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.DA
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

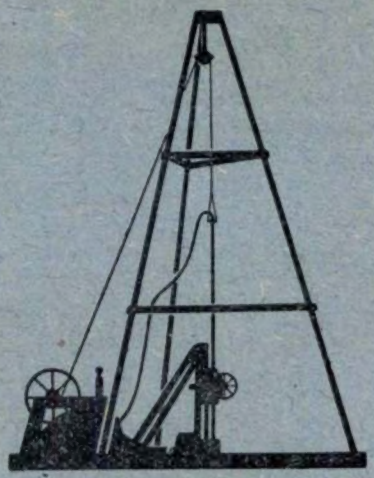
SUMÁRIO

CAPA — Torno vertical instalado nas oficinas da C. U. F., no Barreiro.

		Págs.
Arquitectos e Engenheiros . . .	Eng.º Daniel Vieira Barbosa	1063
Estudo do circuito oscilante com bobina de núcleo de ferro saturado em regime forçado . .	Eng.º Manuel José de Abreu Faro	1075
A nossa capa	. . . . .	1090
Estudo estático da obtenção de ácido fosfórico por via húmida	Eng.º Luís A. de Almeida Alves	1091
A Mecânica do Solo e as suas aplicações	Eng.º Manuel Pimentel Pereira dos Santos	1107
Distribuição das armaduras, em vigas de betão armado, de secção constante, e submetidas a cargas uniformemente distribuídas e a momentos Me e Md, à esquerda e direita, respectivamente	Eng.º Manuel Pio da Maia Ramos	1118
Vida Escolar e Associativa . . .	. . . . .	1125
Biblioteca	. . . . .	1130

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

SONDAGENS RODIO, Limitada



RODIO

Sondagens geológicas, estudo da resistência e permeabilidade de terrenos; laboratório geotécnico

Pesquisas de água.

Consolidação e impermeabilização de terrenos e de obras por meio de injecções de cimento, produtos químicos, argila activada, emulsão betuminosa Shellperm, etc.

Estacas de betão armado, sistema **Ródio** moldadas no solo sem trepidações.

Rebocos comprimidos por «**cement gun**»

Fundações em terrenos difíceis quer por congelação artificial, quer por abaixamento do lençol de água.

As melhores referências no país e no estrangeiro

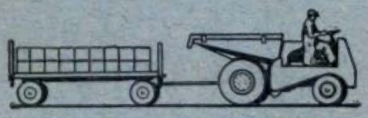
Sócio gerente residente em Portugal:
Walter Weyermann, Eng. civil

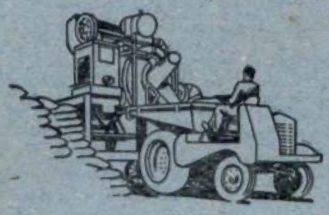
R. S. Mamede ao Caldas, 22, 3.º — LISBOA

Tel. 2 8685

MUIR-HILL DUMPER

TRANSPORTADORES BASCULANTES COM COMANDO ROTATIVO





O método mais económico de transportar materiais a granel, como podem comprovar as unidades já ao serviço em Portugal

///

OS REPRESENTANTES EXCLUSIVOS

HENRY M. F. HATHERLY, L.DA

RUA DO COMÉRCIO, 8

Telefones 2 2001 e 2 6633 — LISBOA

vos fornecerão todos os detalhes e as suas propostas para entregas rápidas

TÉCNICA

JOSÉ MARIA AVILLEZ
DIRECTOR

ANO XXVI - N.º 202 MAIO 1950

ARQUITECTOS E ENGENHEIROS

PELO ENG.º CIVIL (U. P.) DANIEL VIEIRA BARBOSA
Professor catedrático da Faculdade de Engenharia do Porto

C. D. 62.001.7 : 72

A «Técnica» ciente da actualidade e interesse que teria a publicação das opiniões autorizadas sobre a colaboração entre Arquitectos e Engenheiros, resolveu convidar os Ex.mos Srs. Prof. Eng.º Daniel Vieira Barbosa e Prof. Arq. Pardal Monteiro a exporem os seus pontos de vista sobre o assunto.

Inserimos neste número o artigo enviado pelo Prof. Eng.º Vieira Barbosa, reservando para o próximo número a publicação do artigo do Prof. Arq. Pardal Monteiro.

Defensor, desde sempre, da mais íntima colaboração entre arquitectos e engenheiros, não encontro melhor modo de satisfazer a amável solicitação da «Técnica» do que transcrever, quase que a par e passo, aquilo que àcêrca de tão melindroso problema tive ocasião de dizer na Assembleia Nacional, há muito pouco tempo ainda; na realidade, ao discutir-se, aí, a proposta de lei referente à reforma do ensino das Belas-Artes, temi sèriamente que a interpretação que lhe foi dada pela Câmara Corporativa, não fosse a mais conveniente para aquele princípio que defendo. Por isso mesmo o apreciei do modo que me pareceu mais próprio, mais necessário para bem evidenciar a confusão que poderia ser criada em volta dum diploma de que dependerá, em grande parte, o bom entendimento entre técnicos de formação tão diferente.

Porque tudo quanto, depois, ouvi e li em nada me alterou a forma de pensar, julgo que a transcrição que me permito poderá constituir ainda, neste campo, o meu melhor depoimento.

Renovo a afirmação do meu inteiro acordo quanto à vontade expressa nessa proposta de lei de levar a um nível verdadeiramente superior o ensino duma profissão que a todos os títulos nos merece a admiração e o respeito.

Cabe, na verdade, ao arquitecto papel de especial relevo num dos sectores mais importantes do trabalho nacional; e, sendo assim, a sua colaboração interessa sobremaneira ao engenheiro, o qual, numa grande extensão dos seus trabalhos, vai encontrar nele um elemento precioso para a realização dos projectos; mas acresce que a inversa toma,

igualmente, foros de verdade, visto o arquitecto não poder dispensar com frequência, para dar realidade estrutural às suas concepções, buscadas na preocupação da harmonia e da beleza, o auxílio da boa técnica construtiva, a qual, através duma ciência própria, traduzindo-se em cálculos delicados, numa cultura intensa cada vez mais especializada, num conhecimento minucioso das características intrínsecas dos materiais de construção, lhe vem trazer a garantia da solução mais económica dentro da necessária segurança.

E esta, nas condições actuais do ensino, só o engenheiro lha pode, evidentemente, dar.

Temos, assim, duas entidades em presença, que, longe de viverem em campos que se digladiem, devem acamaradar, pelo contrário, no terreno duma boa e leal cooperação.

Isto não implica, como bem se compreende, deixar de haver para cada um deles campos de acção restritos, difíceis talvez de definir nos seus limites rigorosos, mas fáceis de avaliar e sentir nas suas delicadeza e vastidão; ao que se tem de atender é à existência de um campo quase comum de trabalho, onde se encontre a colaboração mais inteligente e mais aberta, para se poder atingir o equilíbrio perfeito entre a forma estética, a economia e a estabilidade do conjunto. Creio que só desta maneira se poderá impedir que materiais apropriados, a par de uma técnica cientìficamente aplicada, possam levar às vezes a construções onde a mediocridade da concepção estética venha a quebrar, porventura, o real valor da obra: os próprios trabalhos de vulto de obras públicas, onde o engenheiro actua como orientador absoluto, não podem, nem devem, com frequência, dispensar a colaboração do arquitecto, a fim de se conseguir maior realce e beleza à grandiosidade e perfeição do conjunto.

Nos seus campos diferentes cada um tem de ser, porém, senhor do seu terreno, tanto mais vasto ou tanto mais estreito quanto mais larga ou quanto mais precária for a sua preparação: são entidades distintas trabalhando em campos de acção diversos; mas já na zona em que a mútua colaboração se torna imprescindível impõe-se o perfeito entendimento dos seus valores relativos, o reconhecimento franco e compreensivo das suas possibilidades diferentes; as formações próprias, especializadas, têm então ainda um papel de inconfundível relevo para os lançar, sem melindres nem equívocos, nas reais possibilidades de uma intervenção colaborante.

É evidente que se impõe de parte a parte, na cultura geral que devem ter, a existência bem marcada de manchas de contacto, definindo uma certa afinidade capaz de facilitar, de permitir, a compreensão e o entendimento: só deste modo se impedirá ao arquitecto a concepção de composições estruturais que a técnica mal comporta ou que a economia proíbe e ao engenheiro o risco de cair, por causa da rigidez demasiado fria de uma concepção de técnica abstracta, em construções atentórias do equilíbrio necessário para a beleza das formas e para o bom sentido das devidas proporções.

Projectando-se porém, e de uma maneira larga, para fora dessa zona comum de pontos de contacto — passe o termo —, impõe-se a especialização, diferente nas suas bases, diversa quanto aos seus fins.

Ora a verdade é que nos encontramos ainda na ausência de uma colaboração completa, feita de um entendimento mútuo, objectivamente alicerçado no reconhecimento e no respeito daquilo para que cada um é, na verdade, capaz; há uma tendência enorme, lamentável, para invadir o campo que não é o seu, em prejuizo, portanto, dum princípio de equilíbrio social e, o que não é menos grave, da perfeição e da economia construtiva.

Não é raro encontrar entre engenheiros a ideia pejorativa de que o arquitecto não passa dum desenhador com relativo bom gosto, capaz de decorar ou de embelezar as construções; e para certos arquitectos o engenheiro, não menos injustamente, pouco mais seria que um calculador de ofício, tendo como bagagem principal do seu preparo científico a régua de calcular e um formulário estrangeiro.

Só nas grandes realizações artísticas ou nas obras de técnica construtiva delicada e complexa se respeitam os campos, na verdade, e se colabora então no verdadeiro sentido;

mas aí a colaboração aparece a coberto duma subalternidade que a própria natureza da obra fez nascer, visto cada um sentir que só aquele que, na realidade, foi capaz de conceber e projectar tem o direito indiscutível de procurar impor a sua solução.

Aliás, esta subalternidade surge por razões que não vão tocar os méritos do técnico ou do artista, visto aparecer justamente pela posição relativa dos méritos de cada um; e cito como exemplos extremos do comando da técnica ou da arte os casos duma barragem em arco ou duma ponte de grande vão, e os dum monumento em pórticos ou dum templo.

Mas fora disso, nos casos mais correntes da construção civil onde essa subalternidade não se imponha, a colaboração não atingiu ainda a perfeição que nos interessa, visto não se encontrar — quantas vezes — no espírito compreensivo dos que vão colaborar.

Sendo assim, tudo quanto possa contribuir para evitar atritos e melindres, atenuar equívocos dispensáveis e definir claramente posições, tem de merecer o apoio daqueles que à construção dedicam o seu entusiasmo, o seu interesse ou mesmo a sua vida; como tudo quanto possa acarretar mais graves situações, capazes de comprometer ou confundir, se deve impedir simplesmente, para não se agravar mais ainda o estado de precário entendimento que, por aqui e por além, se nota entre arquitectos e engenheiros.

É lógico, portanto, que se pretenda atenuar, sob reserva expressa de não confundir as profissões, o sistema de formar engenheiros e arquitectos por métodos radicalmente diferentes. Ainda há pouco tempo Laprade observava que o facto de uns se prepararem sob o signo do método e da disciplina e de outros irem buscar a sua formação à sombra de uma total liberdade — senão mesmo duma fantasia quantas vezes excessiva — levava a comportamentos totalmente opostos; e daqui não resultam benefícios para nenhum, nem para ninguém.

Não se vai negar, decerto, que a educação do espírito dentro de uma precisão condicionante e a excessiva matematização do raciocínio, tão necessária ao estado científico actual da estabilidade das construções e da resistência dos materiais, podem lamentàvelmente conduzir à frieza e à monotonia da expressão; mas o certo é, também, que uma imaginação lançada sem as peias, muita vez indispensáveis, que a realidade dos materiais impõe e uma fantasia criadora presidindo à concepção da obra sem as prisões que amarram às possibilidades estruturais, podem criar enormes agravamentos no custo da construção, senão mesmo um absurdo para aqueles que têm, depois, de ser os responsáveis pela sua segurança e economia.

No meio estará a virtude.

Sendo, portanto, evidente a necessidade de uma colaboração, não menos evidente é, com certeza, a necessidade imperiosa do senso das realidades com que o engenheiro e o arquitecto devem contribuir para essa colaboração; quer dizer que o seu preparo deverá ser de tal modo orientado que os leve a sentir profundamente essa necessidade, de forma a bem saber medir, com o melhor critério, aquilo que cada um deve e pode exigir do outro.

Compreensível é, portanto, que se ficasse apreensivo ao observar-se que na proposta de lei da reforma do ensino das Belas-Artes, se não tivesse dito alguma coisa de fundo àcêrca dessa colaboração; na realidade porém, quer nela, quer no parecer que a acompanhava, nem ao de leve se referia a ligação, cada vez mais necessária, entre arquitectos e engenheiros, a qual, por necessitar de muita compreensão e muito tacto, não poderia ficar sujeita ao perigoso abandono de uma possível interpretação das entrelinhas.

Considerava-se dispensável referir aquilo que não passa de evidente? Entendia-se desnecessário continuar batendo numa tecla que vai perdendo som, dado que a remodelação proposta se destinava a levar o arquitecto a novas possibilidades de projectar e construir?

Afora a colaboração, que se aceitava como indispensável, entre arquitectos e engenheiros nos problemas especificados de urbanismo, todo o resto ficava na nebulosa

mais densa: contribuía-se assim, pela confusão que se criava, para o agravamento de um ou de outro mal-estar que já existe.

No que respeita ao ensino da arquitectura, não se definia sequer como ia ser organizado o conjunto de cadeiras constitutivas do curso; destacava-se vagamente a natureza das matérias que contém, punha-se como princípio o carácter que lhe irá ser dado, marcava-se o tempo da sua duração, apontava-se de um modo, aliás confuso, o fim que se deseja atingir; mas não se especificava um leve esboço dum programa capaz de nos dar ideia do grau de elevação ou de preparo dos futuros arquitectos.

Muito judiciosa e oportunamente observou Reinaldo dos Santos ao assinar esse parecer que:

> Não são os preparatórios que conferem categoria superior ou inferior aos cursos das artes e das ciências, mas a hierarquia da matéria que se ensina e o grau em que é ministrada. E isto independentemente dos homens superiores ou medianos que os frequentam.

Dessa hierarquia da matéria, do grau de elevação dos cursos, não tínhamos pràticamente elementos que nos permitissem «prever»; e, deste modo, não querendo pôr em dúvida que o curso de arquitectura venha a ser de «nível nìtidamente superior» não se poderia avaliar em que grau o virá a ser.

Daqui o não sabermos igualmente em que grau, também, o seu ensino virá a coincidir, ou não, com o do engenheiro civil, não podendo avaliar, portanto, quais os sectores da técnica construtiva em que ambos entrarão em concorrência; e, sendo assim, pode-se caminhar para o conflito, quando exactamente se deve procurar contribuir para uma eficaz colaboração.

É certo que a regulamentação posterior da lei arrumaria o assunto; simplesmente, a melindrosa confusão que apontei dá-lhe acuidade impressionante, visto que para ajuizar com segurança e critério das repercussões reais dessa proposta teríamos de pôr, como permissas claras, as possibilidades que ao arquitecto virão a ser conferidas, não prejudicando uma colaboração sem melindres e em melhor compreensão do que até hoje.

De resto não poderíamos esquecer, também, que a grande massa dos engenheiros civis, formados pelas escolas do Porto e de Lisboa, vivem da construção civil particular, visto aquela que respeita às obras públicas pròpriamente ditas ter quadros com capacidade limitada; o modo extremamente vago com que a proposta foi apresentada, e o parecer da Câmara Corporativa, criaram assim entre ela receios que todos poderão compreender, traduzindo-se numa reacção de ansiedade, que o Governo não poderia menosprezar.

Eu sinto, como engenheiro, que o estudante de arquitectura necessita de uma cultura maior e mais profunda, convenientemente ministrada, a fim de poder acompanhar, compreendendo, a evolução da técnica construtiva: só assim poderá amanhã, como arquitecto, exigir conscientemente do engenheiro aquilo que a sua preparação lhe não possa fornecer; e admito também, sem a menor relutância, que o arquitecto sinta a necessidade de um mínimo de cultura artística para o estudante de engenharia, de forma a que este melhor perceba e sinta a necessidade do arquitecto e mais respeite e compreenda as razões das suas soluções.

Mas o que de modo algum aceito é a confusão de posições relativas, por entrarmos em caminhos que perturbam em vez de aclarar.

Não resta dúvida de que da leitura da proposta e do parecer, agravada ainda pelo tom tão vago com que tudo se propunha, nos ficava a impressão de que se pretendia dar ao arquitecto a bagagem e o direito que lhe permitissem entrar em grande parte dum campo que, até agora, pertencia ao engenheiro civil.

Dizia-se procurar, é certo, habilitar o arquitecto a saber «compreender e utilizar a participação dos peritos» dando-lhe para isso «o conhecimento seguro dos materiais e das técnicas gerais da construção e o conhecimento suficiente de todas as técnicas especializadas relativas à salubridade, segurança, conforto e pertinência dos edifícios (som, iluminação, aquecimento, condições térmicas, isolamento, esgotos, etc.)».

E sob esta redacção poderia defender-se que estava salvaguardada, em grande parte, a posição funcional dos engenheiros civis.

Mas o certo é que se aceitava também, como um axioma, que o «arquitecto contemporâneo ... é o profissional que imagina o plano do edifício, faz o seu projecto em conjunto e no pormenor e depois ordena, orienta e preside à sua construção».

A confusão interpretativa ficava deste modo demonstrada, visto podermos começar por notar que não se encontrava a menor distinção limitativa das suas funções nos casos especiais dum templo ou dum arranha-céus, dum estádio ou dum hangar para aviões.

Acrescentava-se até, no parecer da Câmara Corporativa, que «o seu campo de acção é hoje vastíssimo», visto ser «chamado para conceber, projectar e dirigir a construção de templos, edifícios públicos de grande corporatura, hospitais, mercados, teatros, cinemas, grandes armazéns, fábricas, gares, escolas, museus, bibliotecas, palácios de justiça, bancos, casas de habitação urbanas e rurais, etc.».

E dizia-se também, como aliás é lógico, que «todas estas construções têm de ser ideadas, projectadas e supervisionadas sob o triplo aspecto da função da solidez, da economia e da beleza e integração no ambiente».

E por isso se entregavam ao arquitecto.

Que ficaria, então, para o engenheiro civil fora da competência daquele?

Parece que as obras públicas pròpriamente ditas, como as de hidráulica (e em especial os portos), as estradas, os caminhos de ferro e as pontes: tudo, ou quase tudo, serviços do Estado ou dele dependentes.

Sem discutir agora este critério, que poderia ter defesa na sua concepção em determinado arranjo do ensino, entendi dever fazer as observações seguintes que inteiramente mantenho: ou o cultivo aturado das ciências matemáticas e físicas, a que a proposta se refere como sendo necessário ao arquitecto, é tão largo e tão profundo como deve ser o do engenheiro civil, ou o conhecimento dos materiais e da técnica construtiva se passa a ministrar-lhe com a especialização tão minuciosa como se impõe nas escolas de engenharia, ou então o arquitecto não pode substituir aquele em tão larga medida como da proposta de lei, e do parecer da Câmara Corporativa, se poderia inferir.

Ponho portanto, e por agora, de lado os inconvenientes que apontei, em face da confusão das profissões, para me referir ùnicamente à impossibilidade de se atingir um «fim» que se defende dentro de certos princípios formativos que estavam na base da proposta. Mais do que um erro de escala, o erro é de ligação.

Na verdade, para conseguir o fim em vista, a «sobrecarga de cultura científica e de conhecimento e prática das técnicas da construção» teria de ser tão grande que, mesmo que paradoxalmente se aceitasse não prejudicar a sua «invenção artística», não deixaria tempo ao estudante para, de uma maneira intensa, se dedicar à arquitectura; não seriam, com certeza, os conhecimentos precisos para utilizar formulários ou réguas de calcular que o desviariam, porventura, da finalidade a atingir com a sua formação, visto tudo isto não passar de ferramenta modesta e secundária de trabalho, e nada mais: porque a preparação científica do engenheiro civil não se representa pela possibilidade de usar, sem dificuldades de maior, os formulários correntes ou de utilizar, com segurança, as réguas de cálculo tão simples, para o que lhe basta, aliás, ter aprendido os logaritmos no liceu.

O desvio teria de vir, sim, dum estudo em profundidade da física, da química e da matemática, indispensável à cultura necessária para atingir aquelas possibilidades que, pela proposta de lei em discussão, se queriam dar ao arquitecto; e isto, repito, numa tão

grande absorção de tempo, num preparo tão próprio do espírito, que duvido sèriamente se não prejudicariam a formação estética do artista.

Afirmei, em plena consciência, que sem essa preparação especializada é impossível conceber determinadas estruturas ou propor determinadas soluções, visto que só o conhecimento profundo dos materiais construtivos, e a prática intensiva da ciência da estabilidade, podem criar no projectista a sensibilidade necessária, pela intuição que nasce dum minucioso preparo científico, para certas concepções mais arrojadas ou soluções mais transcendentes.

Há uma contradição flagrantíssima entre tudo quanto, pelo parecer da Câmara Corporativa, se queria entregar ao arquitecto, indo desde a concepção e projecto dos edifícios de grande corporatura até à direcção total das obras mesmo de grande vulto, e a afirmação com que se fecha a apreciação que, na generalidade, a Câmara Corporativa fez da proposta de lei:

> ... o acréscimo de matérias de ensino agora previsto não deverá envolver grande aumento em extensão da matéria de técnica científica do futuro curso. O que desde já se pode prever é um melhor trato em profundidade, valor significativo e potencial construtivo das matérias já incluídas no actual *curriculum* dos estudos.

A incompatibilidade entre estes dois critérios é, na verdade, total.

De facto, mesmo já de Bauschinger a l'Hermitte vai um espaço enorme no conhecimento desses materiais, que a par e passo empregamos; sirvo-me, para exemplo, da madeira, por se tratar dum material tão corrente que muitos só julgavam capaz de preocupar cientìficamente nos campos da preparação e da conservação.

Pois bem: depois de Campredon, de Fonrobert, de Collardet, de Karl Egner, de Kolmann e de tantos outros, surgem-nos leis bem definidas a condicionar o seu emprego, a orientar a sua técnica, a marcar novas e inesperadas directrizes para conceber e projectar as estruturas que compõe.

Quando na Alemanha, antes da guerra, se impôs a economia da madeira em toda a construção, a fim de garantir o aproveitamento máximo do esforço realizado pelos seus silvicultores, von Monroy teve de chamar a si o auxílio dos engenheiros para bem definir, nos casos principais — e até correntes — a melhor disposição das estruturas, a forma mais racional das samblagens, o modo de a pôr a trabalhar com vista a obter a maior das seguranças dentro das soluções mais económicas; e, daí, saiu doutrina, mas doutrina científica, que só uma cultura especializada e profunda permite, muitas vezes, poder aproveitar.

Não se julgue que se trata quase sempre de regras ou de conselhos, visto que, em certos casos de aplicação frequente, sistemas de equações diferenciais são absolutamente necessários para bem interpretar e compreender as soluções; e quem não compreendeu como se chega a elas não as pode impor, ou escolher, com o critério preciso.

Quem não puder interpretar, repito — e não digo agora ùnicamente compreender —, os trabalhos desses técnicos, os resultados de ensaios laboratoriais no campo especializado da própria investigação, não tem horizontes largos para pensar ou atingir determinadas soluções, visto que inclusivamente não sonha — porque os não supõe ou adivinha — os horizontes que existem.

O exemplo pode, como é evidente, generalizar-se, e as restrições condicionantes que pus em relação à madeira são extrapoláveis a todos os outros materiais, que nos levantam ainda, na sua maior parte, problemas técnicos muito mais delicados e difíceis; peguem os que duvidem daquilo que afirmei nos livros ou nas revistas que tratam destes assuntos pela forma que devem ser tratados, vejam, para exemplo, certos manuais, como o *Handbuch der Werkstoffprüfung,* de Siebel, e avaliarão fàcilmente dos conhecimentos de física e de

química superiores que é preciso ter para, muitas vezes, se assentar num bom critério de escolha para o material apropriado, no modo como ele deve e tem de trabalhar; e isto é quase sempre condição, senão suficiente, pelo menos necessária para conceber a estrutura.

E para projectar?

A própria resistência dos materiais exige, já por si, conhecimentos sérios, profundos, da ciência matemática; a simples dedução da fórmula da flexão circular, constituindo a base dos cálculos das vigas e pavimentos, envolve conhecimentos de geometria diferencial, e na dedução das expressões relativas aos esforços tangenciais, a considerar na grande maioria dos casos da flexão simples ou composta, entram princípios importantes de cálculo infinitesimal. Se a simples e corrente determinação dos esforços nas barras de um sistema articulado aparentemente indeterminado (caso, aliás, vulgaríssimo nos projectos das asnas de vão não muito grande) se mostra incompatível com uma preparação ligeira, os problemas da encurvadura, o traçado dos diagramas de Cremona, os métodos de Castigliano, etc., exigem conhecimentos deveras minuciosos de análise matemática.

E a flexão desviada, tão vulgar nas terças de uma cobertura? E os sistemas hiperstáticos, constituindo a massa esmagadora das estruturas actais, mesmo em obras de pouco vulto, para não dizer correntes?

Pode-se avaliar da preparação necessária para os projectar e calcular folheando, entre muitos outros, os tratados de Salmon e de Magnel, de Rieger e de Smet, de Colonetti, e de Torroja, de Müller-Breslau e de Timoshenko, de Morley e de Castellfranchi, os quais, muito longe de constituirem sòmente peças de aperfeiçoamento do engenheiro ansioso de aumentar sua cultura, contribuem já, por indispensáveis, para a preparação do estudante de engenharia civil num curso que se queira actualizado de resistência dos materiais ou de estabilidade das construções.

Direi mesmo mais: cadeiras desta especialidade que os não julgassem precisos para apoiar os seus programas não se poderiam considerar — à luz da ciência actual e do nível que se impõe para o ensino universitário — dignas de fazerem parte de um curso de Engenharia, na realidade superior.

Mas, dir-se-á: nem todos os engenheiros os conhecem e praticam e, contudo, não deixam de trabalhar na construção civil; quem sabe se será assim, mas deixemos então para esses tantos os vários formulários como peças principais da sua bagagem científica, e não como simples auxiliares para a procura rápida de um coeficiente ou de uma fórmula; querer avaliar, por estes, a cultura que é precisa seria o mesmo que aceitar a opinião estulta dos que, por lerem e compreenderem o Código Comercial ou o Administrativo, não julgam necessário todo o preparo, tão complicado e difícil, do curso de Direito para obter a formação jurídica.

O material betão armado e a soldadura metálica, por exemplo, tornam por sua vez mais necessário ainda o estudo aprofundado da distribuição das tensões e da deformação das estruturas; mesmo dentro do âmbito, já hoje considerado bem restrito, das deformações puramente elásticas, a resistência dos materiais elementar é insuficiente para resolver os problemas mais correntes, como sejam os de cálculo das placas, das abóbadas e das cúpulas — por exemplo —, que de modo algum podem ser criteriosamente abordados sem o apoio da teoria matemática da elasticidade.

Adrien Paris, Timoshenko e Dischinger — para citar só estes, que são, aliás, autores de consulta indispensável nas escolas superiores de engenharia — não podem sequer ser lidos sem toda a ciência matemática que faz parte dos nossos preparatórios.

Mas o certo é que a própria teoria da elasticidade já se foi tornando insuficiente para resolver muitos problemas da construção do dia a dia; a teoria da plasticidade precisa ser, muitas vezes, invocada a propósito de assuntos que se têm de considerar correntes.

Bastará lembrar, a título puramente demonstrativo, que alguns regulamentos para a aplicação do betão armado posteriores à guerra — peças bem diferentes do anacrónico

regulamento português, que se impõe, principalmente, pela muita velhice de conceitos e indiferença ignorante pelos conhecimentos que a Ciência actual nos dá com vista às realidades — já permitem, por razões de economia, de segurança e de verdade, considerar as deformações plásticas no cálculo das estruturas; cito, por exemplo, a par dos regulamentos checoslovaco e russo, de Steuermann, o regulamento francês do Ministério do Urbanismo e da Reconstrução da França.

Sem uma grande preparação matemática, feita em profundidade, não é possível avaliar do comportamento dos esqueletos metálicos, ou de betão armado, a constituirem simples estruturas de edifícios; e, sendo assim, impossível será conceber a sua disposição ou forma sujeitando-as ùnicamente a condições de estética ou a normas arquitecturais. Estas, como é evidente, procurar-lhe-ão maior beleza ou realce, tirando delas partido que não tenha preocupado o projectista; para um determinado vão, em face das solicitações que se encontram, não poderia o arquitecto, muitas vezes, conceber e projectar a estrutura, mas antes corrigir, por um melhor ajustamento exterior, qualquer quebra de elegância ou de proporções que, aliás, as estruturas modernas, no aproveitamento máximo das possibilidades que os materiais lhes conferem, apresentam dum modo impressionante, talvez por estarem quase traduzindo, de maneira inconfundível, a própria realidade.

Se é certo, na verdade, que um espírito dedicado à matemática pode ser demasiado frio nas suas concepções, o certo é também que a matemática, por si, leva a representações cheias de harmonia, de equilíbrio e de beleza.

Fugindo mesmo das formas geométricas, prenhes de movimento, com que Baravalle von Brackenburg traduz, a duas dimensões, fórmulas e expressões de matemática, sem querer entrar na referência da reflexão da luz dentro dum vazio, capaz de se definir por uma curva própria que uma equação define (o que vem a ser um ponto de partida para se impor, num projecto, a criação de sombras determinadas), basta-nos as representações tridimensionais do Prof. Rutherford Boyd, demonstrativas de que, em muitos casos, um trabalho de arte se pode ver envolvida numa fórmula matemática.

Nos sólidos compostos por linhas integrais de equações diferenciais com suas constantes, em que cónicas se interligam e entrelaçam do modo mais inesperado e mais belo, há uma forma nova de equilíbrio que nos fere, dando-nos a sensação de se atingir, no jogo de volumes, a perfeição estética; contornos de monumentos, coberturas, cúpulas, etc., tudo nos aparece com as suas linhas elegantíssimas, em resultado de uma simples aplicação do cálculo inlegral.

Novas perspectivas para o artista?

Tudo pode ser, quem sabe! Fique-nos, por agora, a ideia numa reserva de expectativa confiante de que a técnica construtiva se vai desenvolvendo, levantando, na realização e no projecto, problemas cada vez mais delicados; acompanha a verdade da afirmação de Poincaré de que «não há problemas resolvidos, e outros que o não estão: há problemas mais ou menos resolvidos». E é a ânsia de melhor os resòlver e desvendar que precisamente nos conduz à necessidade de uma preparação científica cada vez mais intensa e mais perfeita.

Mas voltemos às considerações que me prendiam — eu sei que é possível fugir dos métodos clássicos e procurar outros sem dúvida mais recentes e aparentemente mais simples, como os de Gheler ou Cross; terá de reconhecer-se, porém, que, na sua aparente simplicidade, envolvem delicados problemas de matemática superior.

Mas que diríamos então dos métodos mais modernos, como os de Southwell (ou das relaxações), para os quais a actual preparação matemática dos nossos estudantes de engenharia se deverá talvez considerar insuficiente?

E se olharmos aos grandes edifícios, às obras industriais ou civis de relativa importância, em que se cai fàcilmente nas concepções relativas às estruturas no espaço, como os pórticos solidários em duas direcções, ou as vigas cruzadas, que levantam problemas — exactamente no fito de atingir a maior economia e a melhor segurança — que

levam só por si a constituir uma especialidade de curso, como a da *Structural Engineer* da Universidade de Harvard ? Especialidade, dir-se-à, que formalmente só na América existe, mas que na realidade se encontra já por toda a parte, como o comprova a leitura dos livros e das revistas que, com carácter científico ou universitário, esmiúçam este assunto através de cálculos delicados, que só uma preparação matemática cuidadosa permite acompanhar.

E que diríamos se fossemos falar do betão pré-esforçado, lançado na construção por Freyssinet, desse material que começa a ser corrente, revolucionando a técnica construtiva e a concepção das estruturas, numa economia enorme das próprias realizações? Que não seria então ùnicamente suficiente a preparação matemática, visto se impor, a par dela, um vasto conhecimento da física, alás imprescindível para os problemas correntíssimos da transmissão das vibrações, da impermeabilização ao som, ao calor e à luminosidade, bem como nos relativos aos problemas de climatização e de aquecimento.

Deverá o curso de Arquitectura, no futuro, aprofundar todos esses problemas? No momento em que a formação preparatória do engenheiro civil impõe novos e inadiáveis acertos para lhe dar possibilidades de bem compreender os rumos complicados por que temos imperiosomente de seguir na técnica construtiva, vamos nivelar, na grande média, todos os construtores e projectistas nos seus conhecimentos da física e da matemática?

Muito embora se possa pretender que tal ideia não se encontrava no espírito da lei que se propunha, visto até se mostrar, pelo contrário, a preocupação de evitar excessos de preparação técnica capaz de prejudicar a formação do esteta, o certo é que, na interpretação que a Câmara Corporativa lhe dava, se entregava ao arquitecto a função de «conceber, projecta e dirigir» a construção, entre outras — repito —, de edifícios públicos de grande corporatura, hospitais, mercados, teatros, cinemas, grandes armazens, fábricas, gares, etc.

Ora eu não posso acreditar que se quizesse defender o empirismo, num ultraje para a Ciência ou numa perda de economia e segurança; não basta criar e construir: é preciso construir e criar bem.

Como não surgirem então todas estas reacções, acompanhando dúvidas e receios, se se aceitava que, à base duma preparação técnica que se desejava limitada, sem «grande aumento em extensão» das matérias constitutivas do actual *curriculum* dos estudos, a acção do arquitecto iria entrar, aberta e francamente, naquele tipo construtivo que se afasta das construções mais correntes, e para o qual se impõem — como mostrei — conhecimentos muito especiais, não só para projectar, mas até para conceber?

Como esquecer, ou pôr de parte, todo o arranjo do edifício sem o auxílio colaborante (ou mesmo dominante, conforme o caso imponha) do engenheiro civil, se a possibilidade do «suporte» nasce duma série de considerações em que intervêm os conhecimentos da estática, as características dos próprios materiais, o saber do modo como eles vão condicionar a estrutura que compõem?

Iamos deixar ao arquitecto a liberdade para essa concepção que, inclusivamente, é condicionada por um dos mais delicados problemas à vista da ciência de hoje em dia, que é o das fundações? Teríamos de habilitá-lo, então, com a preparação necessária para conhecer aquilo que a moderna mecânica dos solos nos ensina e que nos leva — quantas vezes! — a encontrar soluções para as estruturas que nem o vão, nem as cargas, nem até o desejo de conseguir um determinado efeito, deixavam sequer prever?

Grande preparação deveria ser essa, no campo da matemática e da física, para o habilitar a ler e compreender trabalhos como os de Terzághi, Frölich, Caquot e Buisson.

Só o conhecimento profundo da técnica construtiva, que vai buscar apoio ao laboratório e ao cálculo, permite a ginástica de espírito necessária para conceber a solução estrutural mais adequada, com vista à segurança e à economia, sobre a qual — ou dentro da qual — o arquitecto há-de ver erguida a obra que, como artista, pensou e desenhou.

Nestas circunstâncias, a concepção, o projecto, a direcção das construções, têm de

servir-se dele, mas com limites compreensíveis, restritos quantas vezes, que a proposta de lei e o parecer que a acompanhava não julgaram necessário referir; pelo contrário, davam-nos, no seu conjunto, a impressão da entrega dum terreno novo, sem limites, para o arquitecto viver e trabalhar.

E isto tinha de ser esclarecido, por representar uma lacuna gravíssima, pela injustiça que levantava e pela confusão que cria.

Quanto à afirmação peremptória de que o arquitecto contemporâneo é o profissional que vem, depois do projecto feito, «ordenar, orientar e presidir à construção», observo ùnicamente que o facto não teria interesse nos casos comezinhos, mas nos trabalhos de vulto o princípio assim generalizado pode constituir um critério mais do que discutível, condenável.

Na realidade, depois de projectado o edifício no seu jogo de volumes, na sua intercepção de superfícies, nas minúcias delicadas de acabamento e de forma, numa distribuição equilibrada de relevos e de cores, em que se pôs à prova o sentimento do artista, cabe ainda e sempre ao arquitecto dirigir e orientar toda essa parte da obra que diz respeito à estética, podendo ir alterando os pormenores precisos para tirar todo o partido da realização definitiva; ninguém melhor do que ele o saberia fazer.

Mas a obra levanta-se numa estrutura a qual, como é evidente, só o engenheiro pode calcular, e só, portanto, este pode orientar e dirigir todo esse importante conjunto de que dependem a economia e a segurança; só este tem competência para tal, visto que só ele sabe como os elementos se interligam e comportam, só ele conhece a justa posição das parcelas da ossatura, só ele será capaz de alterar o que for conveniente, modificar o que julgar preciso em face de imprevistos, que em toda a obra surgem, quantas vezes até racionalmente levantados por razões de pura arte que o arquitecto sentiu.

E não se julgue que este modo de ver se justifica por simples deformação profissional; seja-me, na dúvida, permitido pôr a responder por mim um dos arquitectos mais notáveis da América Latina, figura brilhantíssima de uma plêiade brilhante, cujas realizações constituem, no dizer autorizado de Persitz, a mais potente manifestacão de uma arquitectura nova no Mundo. E se houver então aí deformação profissional ela deverá polarizar-se, com certeza, num campo de interpretação completamente oposto.

Para Rino Levi o fim do arquitecto é o estudo da forma em relação com o ambiente e o clima, tendo em conta certas condições técnicas e funcionais; cabe-lhe a criação harmoniosa dos ritmos, a ordenação dos volumes, os cheios e os vazios, jogando com a cor e com a luz.

Ao mesmo tempo que defende a necessidade duma cultura intensa, técnica e científica, justificando-se na afirmação de que a «arquitectura é uma ciência e uma arte», reconhece abertamente que ela se tornou tão complexa, em face das condições actuais e da contribuição cheia de interesse que lhe traz o progresso científico, que se lhe torna indispensável uma colaboração íntima, não só com os especialistas do equipamento funcional, mas também com os da técnica construtiva.

Ao olhar à construção pròpriamente dita, defende o princípio, que convictamente aceita, de que só através de um contacto perfeito com técnicos e engenheiros pode o arquitecto obter a reunião e coordenação dos dados indispensáveis à solução do seu problema em estudo; longe de querer tudo comandar, acha imprescindível um trabalho de *équipe*, único meio capaz de permitir ao arquitecto a obtenção da solução adequada, tendo em conta três factores essenciais à construção: economia, técnica e conforto.

Foi este trabalho de *équipe*, considerado indispensável, que a proposta de lei e o parecer da Câmara Corporativa pareciam ter esquecido na aparência de uma entrega total dos direitos e poderes que conferiam ao arquitecto, o qual — como observa Levi — só depois dele realizado, e com base nele, faz valer a sua capacidade criadora, dá ao projecto o seu aspecto definitivo e engrena todos os elementos no organismo funcional técnico e

plástico. É então, ainda no seu dizer, que o arquitecto se sente completamente no âmago do assunto e senhor absoluto da obra, de que tem uma visão de minúcia integral.

Julgo poderem compreender-se, em face do que acima ficou dito, os receios que entendo dever manifestar; na realidade se se desejasse ir para o «engenheiro-arquitecto» ou para o «arquitecto-engenheiro» (conforme se pretenda), então o problema necessitaria também de ser revisto, pondo-se de modo radicalmente diferente, visto que, nestas circunstâncias, nunca o novo curso a criar se poderia desenvolver dentro do esquema apresentado, o qual viria ainda a implicar, por seu lado, duplicações indispensáveis e importantes de despesas, acarretando assim um agravamento orçamental que, por desnecessário, não estaria posto como ponto de partida — creio eu — para a reforma em questão.

Se não se tratava porém disso, como me pareceu ser o ponto de vista apresentado, então não se tivesse sido tão omisso no formular dos princípios ou na especificação dos meios: definisse-se claramente o problema e vincasse-se, não menos claramente também, que a preparação que se procurava, tendo por fim essencial habilitar o arquitecto a melhor compreender as dificuldades construtivas, o levaria a sentir de um modo mais perfeito a necessidade do auxílio e da colaboração do engenheiro civil e não a dispensá-lo, ou a subordiná-lo, por força de uma interpretação legislativa que não encontraria apoio no necessário conhecimento científico.

O arquitecto, dentro da sua arte, já muito encontra que baste para o tornar merecedor da admiração e do respeito, sem necessidade de desvios para campos de trabalho que obrigam a uma preparação distinta capaz de lhe trazer frieza, que dispensa, em troca da perda da sensibilidade artística, que precisa.

Poderia terminar lembrando a frase de Perret: «O arquitecto é um poeta que pensa e fala construindo»; pois bem: tudo devemos fazer para lhe dar facilidades à expressão das suas frases, criando-lhe a liberdade possível para o deixar exprimir-se numa linguagem de beleza.

Não lhe exijamos, ao contrário, uma preocupação demasiada de fórmulas e de números, uma ligação excessivamente estreita com a realidade pròpriamente material da obra que o possa comprometer na sua fantasia equilibrada e criadora de expressão.

Quem sabe se o problema não poderia ter, de resto, uma solução mais de fundo, talver mais criteriosa e capaz; na verdade, a reforma necessária do ensino das Belas-Artes, dentro dos moldes em que foi proposta e relatada e dado os fins que se procura atingir, constitui inegàvelmente uma parte, delicada e importante, da reforma que se espera para o ensino técnico superior em Portugal.

Valerá a pena, pergunto, começar pela parcela, indo da periferia para o centro, quando o contrário poderia ser mais lógico e mais perfeito? Vamos correr o risco de ampliar serviços, aumentar desnecessàriamente as dotações, criar novos encargos, quando amanhã, ao resolver-se o problema no todo, podemos vir a encontrar duplicações que se dispensam?

Essa reforma importantíssima porque todos ansiamos pode trazer ao País incontestáveis benefícios; por isso a devemos poupar cuidadosamente a qualquer novo empecilho que lhe possa limitar a sua projecção ou a sua amplitude. Quem nos garante que esta parte, esta parcela, que fica subordinada à rigidez duma lei não poderia amanhã ser encarada doutro modo, quando ligada e articulada no conjunto?

Sabemos como o ensino da engenharia civil está pletório de cadeiras, como os programas são de tal modo absorventes que, ao estudante, se impõe um exaustivo trabalho de cultura o qual, à força de se não querer deixar — e muito bem — correr em superfície, lhe torna esmagante a vida, por cada um procurar fornecer-lha em profudidade.

Sabemos também, por outro lado, que nos estamos afastando, dia a dia, da tendência para a especialização, que caracteriza já há muito tempo os meios universitários similares no estrangeiro.

Pode a nossa escala não deixar possíveis veleidades para se querer copiar o que se faz lá fora, mas o certo é que o nosso território e o interesse nacional oferecem um campo muito vasto aos trabalhos de obras públlicas, a desenvolverem-se, aliás, num ritmo tão intenso como aqui há vinte ou trinta anos nos não pareceria possível; e, nestas circustâncias, quem sabe se uma primeira especialização se não poderia econòmicamente impor.

Deixando para um lado — e a talhe de foice o digo — o técnico de obras públicas pròpriamente dito (com os portos e as obras de hidráulica em geral, as pontes, os caminhos de ferro e as estradas), teríamos então para o outro um ramo de preparação, no âmbito das construções civis, capaz de conduzir, através de cursos próprios com cadeiras complementares devidamente estruturadas, ao engenheiro-arquitecto ou ao arquitecto-engenheiro.

Não seriam processos de preparação inteiramente novos que não coubessem — quem sabe? — num país de recursos financeiros limitados como o nosso; o Instituto Superior Técnico de Milão, o Instituto Superior Técnico de Charlotemburgo, o Instituto Tecnológico de Massachusetts souberam resolver econòmicamente o problema; e não se pretenderá que na Itália, na Alemanha e nos Estados Unidos da América do Norte falhem os técnicos e os artistas na construção civil.

Com esta solução, ou qualquer outra que um estudo minucioso e cuidado podesse vir a aconselhar, haveria sempre vantagem, com certeza, em integrar na reforma geral do ensino técnico superior aquela que foi proposta.

Tudo quanto fizermos em prol duma colaboração estreita e proveitosa entre duas profissões que tanto têm contribuído para o progresso nacional, constituirá atitude meritória que não é preciso enaltecer; como tudo quanto possa contribuir para confusões e injustiças, lutas e desacordos, deve ser pura e simplesmente afastado, a fim de não prejudicar não só os interessados mas, inclusivamente, o próprio país também.

Estudo do circuito oscilante com bobina de núcleo de ferro saturado em regime forçado

PELO ENG.º ELECT. (I. S. T.) MANUEL JOSÉ DE ABREU FARO
Assistente do I. S. T.

(Continuação)

C. D. 538.551.2

8 — Considerações sobre o regime forçado do circuito oscilante

Vamos agora estudar o regime forçado do circuito oscilante considerado.

Para determinação dos estados de equilíbrio em regime forçado, utilizaremos a lei de variação $i = a\varphi + b\varphi^5$ anteriormente estabelecida.

Dum modo geral a lei de variação $f(\varphi, i) = 0$ deverá ser expressa por

$$i = a_1\varphi + a_3\varphi^3 + a_5\varphi^5,$$

a consideração dum termo $a_3\varphi^3$ não altera em nada o modo como tratámos o problema, tornando-se apenas mais trabalhosos os cálculos necessários.

Consideremos então o circuito oscilante alimentado por uma tensão alternada sinusoidal:

$$e_k = E_k \,.\, \text{sen}\,(\omega t + \delta)$$

As equações que regem o comportamento do circuito são em valores instantâneos:

$$\frac{d\varphi}{dt} + Ri + \int \frac{i\,dt}{c} = e_k \qquad (1)$$

$$i = a\varphi + b\varphi^5 \qquad (2)$$

De acordo com a experiência, sabemos que o circuito oscilante considerado tem em regime forçado estados de equilíbrio em que as correntes e tensões correspondentes são funções periódicas do tempo satisfazendo às seguintes condições:

a) Admitem um desenvolvimento em série de Fourier;

b) A pulsação da fundamental é igual à pulsação da tensão e_k;

c) As amplitudes A_n das harmónicas satisfazem a:

$$A_n > A_p \qquad n > p$$

$$\lim_{n \to \infty} A_n \to 0$$

São estas soluções que pretendemos determinar.

Deste modo, excluímos do nosso trabalho quaisquer outras como por exemplo: funções periódicas em que a pulsação da fundamental fosse $\frac{\omega}{n}$ ou em que $A_n > A_p$ para $n > p$, estas últimas soluções cuja possibilidade não discutimos aqui são vulgarmente estudadas sob o título de «desmultiplicação e multiplicação de frequência» respectivamente.

Generalidades sobre as soluções consideradas

Visto a corrente ser uma função ímpar do fluxo, segue-se que as funções periódicas em jogo serão da forma:

$$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$$

e que portanto desenvolvidas em série de Fourier só conterão harmónicas ímpares.

Consideremos então a corrente i, fluxo φ, e as tensões e_R, e_C, e_B e sejam os seus desenvolvimentos:

$$i = \sum_n i_n = \sum_n I_n \,\text{sen}\,(n\omega t + \alpha_{In}) \quad n = 1, 3, 5 \ldots\ldots$$

$$\varphi = \sum_n \varphi_n = \sum_n \Phi_n \,\text{sen}\,(n\omega t + \alpha_{\phi n})$$

$$e_R = \sum_n e_{Rn} = \Sigma\, E_{Rn} \,\text{sen}\,(n\omega t + \alpha_{Rn})$$

$$e_C = \sum_n e_{Cn} = \Sigma\, E_{Cn} \,\text{sen}\,(n\omega t + \alpha_{Cn})$$

$$e_B = \sum_n e_{Bn} = \Sigma\, E_{Bn} \,\text{sen}\,(n\omega t + \alpha_{Bn})$$

$$e_K = E_K \,\text{sen}\,(\omega t + \delta)$$

A equação (1) pode-se escrever sob a forma:

$$e_B + e_R + e_C = e_K \qquad (3)$$

Que de acordo com os desenvolvimentos admitidos conduz a n equações:

$$e_{B1} + e_{R1} + e_{C1} = e_K \qquad (4)$$

$$e_{Bn} + e_{Rn} + e_{Cn} = 0 \qquad (5)$$

às quais podemos aplicar o cálculo simbólico, obtendo-se as equações em amplitudes complexas:

$$\overline{E}_{B1} + \overline{E}_{R1} + \overline{E}_{C1} = \overline{E}_K \qquad (6)$$

$$\overline{E}_{Bn} + \overline{E}_{Rn} + \overline{E}_{Cn} = 0 \qquad (7)$$

Calculemos agora o valor médio da potência $p = e_K\, i$

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T e_k\, i\, dt \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

De acordo com as expressões de e_K e i será:

$$P_m = \frac{1}{2} E_k I_1 \cos(\delta - \alpha_{11}) \qquad (8)$$

Uma vez que a potência dissipada se limita às perdas de Joule em *R* será ainda:

$$P_m = R\, I_{ef}^2 = \frac{R}{2}(I_1^2 + I_3^2 + \dots) \qquad (9)$$

De (8) e (9) resulta:

$$E_K I_1 \cos(\delta - \alpha_{11}) =$$
$$= R\, I^2 \left(1 + \frac{I_3^2}{I_1^2} + \frac{I_5^2}{I_1^2} + \dots\right)$$

Donde se conclui que:

$$E_K \cos(\delta - \alpha_{11}) > R\, I_1 \qquad (10)$$

A relação (10) diz-nos que no diagrama vectorial correspondente à equação (6) a projecção de $\overline{E}_K$ sobre $\overline{I}_1$ excede $R\overline{I}_1 = \overline{E}_{R1}$

Uma vez que e_C se relaciona com *i* por:

$$e_C = \int \frac{i\,dt}{c}$$

segue-se que nos diagramas vectoriais correspondentes às equações (6) (7) os vectores $\overline{E}_{C1}$, $\overline{E}_{Cn}$ estão em quadratura e atrazo em relação aos vectores $\overline{I}_1$, $\overline{I}_n$

Da relação $e_B = \frac{d\Phi}{dt}$ conclui-se que os vectores $\overline{E}_{B1}$, $\overline{E}_{Bn}$ estão em quadratura e avanço em relação aos vectores $\overline{\Phi}_1$, $\overline{\Phi}_n$.

Construamos agora os diagramas vectoriais correspondentes às equações (6) e (7) (fig. 6).

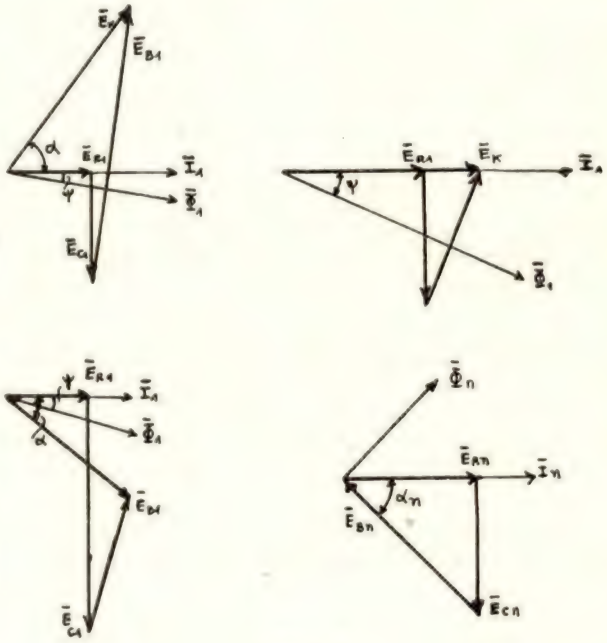


Fig. 6

Para a equação (6) consideramos as três hipóteses possíveis quanto à desfasagem entre $\overline{E}_K$ e $\overline{I}_1$.

Verifica-se imediatamente que $\overline{E}_{B1}$ não está em quadratura com $\overline{I}_1$, e que o fluxo $\overline{\Phi}_1$ está em atrazo em relação a $\overline{I}_1$.

Do diagrama vectorial correspondente a (7) conclui-se que a tensão $\overline{E}_{Bn}$ tem uma componente activa negativa que compensa a tensão $\overline{E}_{Rn}$, o que fìsicamente significa que a potência dissipada pela harmónica da

ordem n da corrente $R I^2_{nef}$ é fornecida pela bobina, isto para todas as harmónicas de ordem superior. Analisemos agora o modo como a bobina compensa essa potência.

Para isso consideremos a equação (6)

$$\overline{E}_k = \overline{E}_{R1} + \overline{E}_{C1} + \overline{E}_{B1}$$

Vamos calcular o produto interno de $\overline{E}_k$ por $\overline{I}$ e dividir por dois. Usando a mesma notação dos diagramas vectoriais será:

$$\frac{1}{2} E_k I_1 \cos \alpha = \frac{1}{2} E_{R1} . I_1 + \frac{1}{2} E_{B1} I_1 \operatorname{sen} \psi$$

ou ainda:

$$\frac{1}{2} E_k I_1 \cos \alpha = \frac{1}{2} R I_1^2 + \frac{1}{2} E_{B1} I_1 \operatorname{sen} \psi \quad (11)$$

mas como

$$Pm = \frac{1}{2} E_k I_1 \cos \alpha = \frac{1}{2} R (I_1^2 + I_3^2 + \dots)$$

Conclui-se que:

$$\frac{1}{2} E_{B1} I_1 \operatorname{sen} \psi = \frac{R}{2} (I_3^2 + I_5^2 + \dots) \quad (12)$$

Por outro lado dos diagramas das equações (7) conclui-se:

$$\frac{1}{2} E_{Bn} I_n \cos \alpha_n = \frac{R}{2} I_n^2$$

ou seja

$$\frac{1}{2} [E_{B3} I_3 \cos \alpha_3 + E_{B5} I_5 \cos \alpha_5 + \dots] =$$

$$= \frac{R}{2} (I_3^2 + I_5^2 \dots) \quad (13)$$

Reunamos agora as expressões (8) (9) (11) (12) (13)

$$P_m = \frac{1}{2} E_K I_1 \cos \alpha \quad (8)$$

$$P_m = R I^2_{ef} = \frac{1}{2} R (I_1^2 + I_3^2 + \dots) \quad (9)$$

$$P_m = \frac{1}{2} R I_1^2 + \frac{1}{2} E_{B1} I_1 \operatorname{sen} \psi \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} E_{B1} I_1 \operatorname{sen} \psi = \frac{1}{2} R (I_3^2 + I_5^2 + \dots) \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} E_{B3} I_3 \cos \alpha_3 + \frac{1}{2} E_{B5} I_5 \cos \alpha_5 + \dots =$$

$$= \frac{R}{2} (I_3^2 + I_5^2 + \dots) \quad (13)$$

Como se sabe, só contribuem para o valor médio da potência o produto das harmónicas da mesma ordem; deste modo se justifica a equação (8).

Por outro lado a potência dissipada limita-se à das perdas de Joule em R, o que nos permite escrever (9). De (8) e (9) conclui-se ainda que $\overline{E}_{B1}$ não está em quadratura com $\overline{I}_1$.

De (9) e (11) conclui-se que à componente activa de $\overline{E}_{B1}$ corresponde uma potência exactamente igual à potência dissipada em R pelas harmónicas de ordem superior da corrente, relação (12)

A relação (13) diz-nos finalmente que a bobina, através das tensões E_{B3}, E_{B5} ..., funciona como um gerador de potência activa, sendo a potência fornecida igual à potência dissipada em R pelas harmónicas da corrente, i_3, i_5 . . .

O significado físico desta sucessão de relações é o seguinte:

A harmónica da ordem n da corrente dissipa energia em R, devendo portanto existir um gerador que forneça essa energia sob a forma duma tensão da mesma pulsação da harmónica da corrente.

Esse gerador é a bobina, que apresenta as tensões $\overline{E}_{B3}$, $\overline{E}_{B5}$ . . com componentes activas negativas. Esta energia deverá ser recebida da fonte de alimentação o que de facto sucede e se explica pela componente activa de $\overline{E}_{B1}$.

Em resumo: a bobina que é o elemento não linear do circuito acarreta a existência de harmónicas na corrente as quais dissipam energia em R. Para que esse consumo se possa reflectir na fonte de alimentação de pulsação ω opera-se uma transforma-

ção de potência na bobina, que se comporta como um receptor de potência activa de pulsação 2ω e um gerador dum somatório de potências activas de pulsação 6ω, $10\omega \ldots$; sendo o valor médio da potência activa consumida igual ao somatório dos valores médios das potências activas fornecidas.

* * *

Consideremos agora as equações (7)

$$\bar{E}_{Bn} + \bar{E}_{Rn} + \bar{E}_{Cn} = 0 \qquad n = 3, 5, \ldots$$

Destas equações e das relações

$$e_B = \frac{d\varphi}{dt} \qquad e_C = \int \frac{i\,dt}{c}$$

resulta:

$$E_{Bn}^2 = E_{Rn}^2 + E_{Cn}^2$$

ou ainda:

$$n^2 \omega^2 \Phi_n^2 = I_n^2 R^2 + \frac{I_n^2}{\omega^2 n^2 c^2}$$

donde se tira:

$$\Phi_n = \frac{1}{n^2 \omega^2 c} \sqrt{1 + n^2 R^2 \omega^2 c^2} \; . \; I_n \qquad (14)$$

Chamemos ε a $R\omega c = \dfrac{R}{\dfrac{1}{\omega c}}$ ou seja à relação entre a resistência e a reactância correspondente à pulsação da fundamental.

De (14) resulta:

$$\frac{\Phi_n}{\Phi_1} = \frac{1}{n^2 \omega^2 c} \sqrt{1 + n^2 \varepsilon^2} \; . \; \frac{I_1}{\Phi_1} \frac{I_n}{I_1}$$

Designemos

$$\frac{\Phi_n}{\Phi} \text{ e } \frac{I_n}{I_1} \text{ por } p_{\varphi n} \text{ e } p_{In}$$

vindo portanto:

$$p_{\varphi n} = \frac{1}{n^2 \omega^2 c} \sqrt{1 + n^2 \varepsilon^2} \; \frac{I_1}{\Phi_1} \; p_{In} \qquad (15)$$

Ficam deste modo relacionadas as percentagens das harmónicas da ordem n do fluxo e da corrente.

Ora

$$\omega \Phi_1 = E_{B1} \quad \text{e} \quad \frac{I_1}{\omega c} = E_{C1}$$

e sendo assim (15) pode-se escrever:

$$p_{\varphi n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{E_{C1}}{E_{B1}} \sqrt{1 + n^2 \varepsilon^2} \; p_{In} \qquad (16)$$

Esta relação elucida-nos sobre a natureza das funções periódicas que constituem as soluções pretendidas.

De facto basta atender à relação:

$$i = a\varphi + b\varphi^5$$

para se concluir que o fluxo e a corrente não podem ser simultâneamente sinusoidais.

Da relação (15) conclui-se por outro lado que não sendo sinusoidal a corrente também não é sinusoidal o fluxo e vice-versa, sendo válida esta conclusão para c, ε quaisquer com excepção de:

$$c = \infty \qquad R = 0$$

em que seria o fluxo sinusoidal.

Como consideramos o circuito oscilante será sempre $c \neq \infty$ e deste modo e atendendo ainda às relações

$$e_B = \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{e} \quad e_C = \int \frac{i\,dt}{c}$$

podemos concluir que nenhuma das funções φ, i, e_c, e_B, é sinusoidal.

Como se verá, teremos necessidade na resolução do sistema (1) (2) de desprezar harmónicas de ordem superior a fim de facilitar o cálculo dos coeficientes das séries que representam as funções que satisfazem a (1) (2).

Como esses desprezos só são lícitos para pequenas percentagens das harmónicas de ordem superior convém tomar como incógnita a função que esteja mais próxima da forma sinusoidal, e essa é o fluxo desde que se considerem pequenos valores de R.

Consideremos (16) e façamos $R = 0$ ou seja $\varepsilon = 0$ virá:

$$p_{\varphi n} = \frac{1}{n^2} \frac{E_{Cl}}{E_{Bl}} p_{in}$$

Donde se conclui que para pequenos valores da relação $\frac{E_{Cl}}{E_{Bl}}$, $p_{\varphi n}$ terá um valor pequeno.

Consideremos por exemplo $p_{i3} = 60\,\%$ e $p_{i5} = 30\,\%$ valores estes que correspondem já a um elevado valor das percentagens da 3.ª e 5.ª harmónicas na corrente.

Teremos para:

$$\frac{E_{Cl}}{E_{Bl}} = 1 \qquad p\,\varphi_3 = 6{,}7\,\% \qquad p\,\varphi_5 = 1{,}2\,\%$$

$$\frac{E_{Cl}}{E_{Bl}} = 1{,}5 \qquad p\,\varphi_3 = 10\,\% \qquad p\,\varphi_5 = 1{,}8\,\%$$

Deste modo se verifica que para $R = 0$ o fluxo conterá, de facto, uma pequena percentagem de harmónicas e que será válido o desprezo das harmónicas de ordem superior à 5.ª ou mesmo, para casos em que não se deseje uma determinação rigorosa duma grandeza, das harmónicas de ordem superior à 3.ª

As conclusões àcerca do pequeno valor de $p_{\varphi n}$ são válidas ainda desde que se considere ε pequeno.

* * *

Terminamos aqui as considerações que queríamos fazer sobre as soluções pretendidas, ficámos deste modo elucidados sobre o aspecto energético, posição relativa das amplitudes complexas e obtivémos ainda uma relação que nos esclarece sobre o afastamento da forma sinusoidal de fluxo que tomaremos como incógnita fundamental.

9 — Regime forçado do circuito oscilante sem perdas

Inicialmente estudaremos o circuito com resistência suposta nula, visto ser este o caso em que o fenómeno que pretendemos evidenciar se manifesta com mais intensidade, seguidamente estudaremos o circuito com resistência tomando como parâmetro esta.

Consideremos pois o sistema (1) (2) para $R = 0$

$$\frac{d\varphi}{dt} + \int \frac{i\,dt}{c} = e_k \qquad (17)$$

$$i = a\varphi + b\varphi^5 \qquad (2)$$

E seja e_k da forma

$$e_k = E_k \operatorname{sen}(\omega t + \delta).$$

Visto que vamos tomar φ como incógnita fundamental eliminemos i entre (17) e (2), para o que basta derivar (17) em ordem a t obtendo-se:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{c}(a\varphi + b\varphi^5) = \frac{de_k}{dt} \qquad (18)$$

Será esta equação que temos de resolver.

Façamos $\delta = \frac{\pi}{2}$ e $\omega t = u$, a equação (18) transforma-se em:

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{1}{\omega^2 c}(a\varphi + b\varphi^5) = -\frac{E_k}{\omega} \operatorname{sen} u \qquad (19)$$

chamando a:

$$\frac{a}{\omega^2 c} = \alpha \qquad \frac{b}{\omega^2 c} = \beta \qquad -\frac{E_k}{\omega} = \Phi_k$$

A equação (19) converte-se em:

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + \alpha\varphi + \beta\varphi^5 = \Phi_K \operatorname{sen} u \qquad (20)$$

Pelo facto do circuito não ter resistência segue-se que as funções φ, i, etc. admitirão um desenvolvimento só em senos ou cosenos, isto é, todas as harmónicas passam simultâneamente pelo valor zero quando o mesmo suceder à fundamental.

De (20) conclui-se que φ admitirá um desenvolvimento só em senos.

Deste modo conhecemos já a forma dum integral particular de (20):

$$\varphi = \sum_n x_n \operatorname{sen} n u \quad n = 1,3 \ldots \tag{21}$$

Introduzindo este integral em (20) determinaremos os coeficientes x_n, identificando as harmónicas da mesma ordem do 1.º e 2.º membros.

Calculemos separadamente as parcelas de (20)

a) Cálculo de $\frac{d^2 \varphi}{d u^2}$

$$\frac{d^2 \varphi}{d u^2} = - \sum_n n^2 x_n \operatorname{sen} n u \tag{22}$$

b) Cálculo de φ^5

Teremos:

$$\varphi^5 = (\sum_n x_n \operatorname{sen} n u)^5 \tag{23}$$

Seja ${}^5\chi_n$ o coeficiente da harmónica de ordem *n* do desenvolvimento de (23); φ^5 poderá escrever-se sob a forma:

$$\varphi^5 = \sum_n {}^5\chi_n \operatorname{sen} n u \tag{24}$$

${}^5\chi_n$ representa um polinómio homogéneo do 5.º grau em $(x_1\ x_3 \ldots)$

Substituindo (21) (22) (24) em (20) e igualando os coeficientes das harmónicas de ordem *n*, obtemos o sistema:

$$x_1 (\alpha - 1) + \beta\, {}^5\chi_1 = \Phi_K \tag{25}$$

$$x_n (\alpha - n^2) + \beta\, {}^5\chi_n = 0 \quad n = 3,5 \ldots \tag{26}$$

O sistema (25) (26) conduz a tantas equações quantas as incógnitas e uma vez que, fìsicamente, podemos considerar finito o desenvolvimento de φ, segue-se que podemos determinar os coeficientes $x_1 \ldots x_n$.

Simplesmente a resolução do sistema (25) (26) é tão trabalhosa que para obtermos resultados práticos temos que fazer simplificações no cálculo de ${}^5\chi_n$. Estas simplificações tornam-se legítimas depois das considerações que fizemos sobre a natureza das soluções pretendidas e em que concluimos que o fluxo tem uma pequena percentagem de harmónicas; calculemos agora ${}^5\chi_n$ para $n = 1, 3$ e 5.

Visto que x_3 tomará valores máximos da ordem de 10 % de x_1, e x_5 da ordem de 1 %, vamos considerar no desenvolvimento de φ^5 apenas os termos em $x_3\ x_5$ e x_3^2

Deste modo poderemos escrever para φ^5:

$$\varphi^5 = (\sum_n x_n \operatorname{sen} n u)^5$$

$$\varphi^5 \simeq x_1^5 \operatorname{sen}^5 u + 5\, x_1^4 \operatorname{sen}^4 u\, (x_3 \operatorname{sen} 3 u + x_5 \operatorname{sen} 5 u) + 10\, x_1^3 \operatorname{sen}^3 u\, (x_3 \operatorname{sen} 3 u)^2$$

Atendendo a que:

$$\operatorname{sen}^5 u = \frac{10}{16} \operatorname{sen} u - \frac{5}{16} \operatorname{sen} 3 u + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 5 u$$

$$\operatorname{sen}^4 u \,.\, \operatorname{sen} 3 u = - \frac{5}{16} \operatorname{sen} u + \frac{6}{16} \operatorname{sen} 3 u - \frac{4}{16} \operatorname{sen} 5 u + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 7 u$$

$$\operatorname{sen}^4 u \,.\, \operatorname{sen} 5 u = \frac{1}{16} \operatorname{sen} u - \frac{4}{16} \operatorname{sen} 3 u + \frac{6}{16} \operatorname{sen} 5 u - \frac{4}{16} \operatorname{sen} 7 u + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 9 u$$

$$\operatorname{sen}^3 u \,.\, \operatorname{sen}^2 3 u = \frac{6}{16} \operatorname{sen} u - \frac{3}{16} \operatorname{sen} 3 u + \frac{3}{16} \operatorname{sen} 5 u - \frac{3}{16} \operatorname{sen} 7 u + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 9 u$$

Obtemos para

$${}^5\chi_1 \quad {}^5\chi_3 \quad {}^5\chi_5$$

as expressões:

$$^5\chi_1 = \frac{10}{16} x_1^5 - \frac{25}{16} x_1^4 x_3 + \frac{5}{16} x_1^4 x_5 + \frac{60}{16} x_1^3 x_3^2 \quad (27)$$

$$^5\chi_3 = -\frac{5}{16} x_1^5 + \frac{30}{16} x_1^4 x_3 - \frac{20}{16} x_1^4 x_5 - \frac{30}{16} x_1^3 x_3^2 \quad (28)$$

$$^5\chi_5 = \frac{1}{16} x_1^5 - \frac{20}{16} x_1^4 x_3 + \frac{30}{16} x_1^4 x_5 + \frac{30}{16} x_1^3 x_3^2 \quad (29)$$

Como se verá x_3 é de sinal contrário a x_1, enquanto que x_5 apresenta o mesmo sinal que x_1.

Baseados nesta hipótese e admitindo uma percentagem de 3.ª harmónica de 10 % e de 5.ª harmónica 1 % calculemos os erros que se cometem, desprezando em $^5\chi_n$ os termos em $x_5 x_1^4$ e $x_3^2 x_1^3$ em relação aos termos em x_1^5 e $x_1^4 x_3$.

Teremos então em valor relativo os erros $\varepsilon\,(^5\chi_n)$

$$\varepsilon\,(^5\chi_1) = \frac{0{,}05 + 0{,}6}{10 + 2{,}5} = 5{,}2\,\%$$

$$\varepsilon\,(^5\chi_3) = \frac{0{,}2 + 0{,}3}{5 + 3} = 6{,}2\,\%$$

$$\varepsilon\,(^5\chi_5) = \frac{0{,}3 + 0{,}3}{1 + 2} = 20\,\%$$

Deste modo verificamos que podemos desprezar com certa aproximação estes termos em $^5\chi_1$ $^5\chi_3$ mas que não o podemos fazer em $^5\chi_5$. Fazendo estas simplificações em $^5\chi_1$ $^5\chi_3$ o sistema (25) (26) converte-se para as primeiras três equações em:

$$x_1(\alpha - 1) + \frac{\beta}{16}\left(10 x_1^5 - 25 x_1^4 x_3\right) = \Phi_k \quad (30)$$

$$x_3(\alpha - 9) + \frac{\beta}{16}\left(-5 x_1^5 + 30 x_1^4 x_3\right) = 0 \quad (31)$$

$$x_5(\alpha - 25) + \frac{\beta}{16}\left(x_1^5 - 20 x_1^4 x_3 + 30 x_1^4 x_5 + 30 x_1^3 x_3^2\right) = 0 \quad (32)$$

Analisando este sistema conclui-se que:

1) As equações (30) (31) determinam x_1 e x_3.
2) A equação (31) define dum modo unívoco $x_3 = f(x_1)$.
3) A equação (32) define por intermédio de (31) $x_5 = f(x_1)$.

Deste modo uma vez conhecido x_1, teremos expressões simples que nos darão as harmónicas em função da fundamental x_1.

Eliminando x_3 entre (30) e (31) obtemos uma equação do 9° grau em x_1 cuja resolução se apresenta pouco prática. Procuremos pois outro modo de resolver o sistema.

* * *

Consideremos para isso a equação (30) escrita sob a forma

$$\frac{10\beta}{16} x_1^5 (1 - 2{,}5\, p_3) = (1 - \alpha) x_1 + \Phi_k \quad (30)$$

sendo

$$p_3 = \frac{x_3}{x_1}$$

Consideremos agora outra equação que difere de (30) por se ter desprezado $2{,}5\, p_3$ em relação à unidade

$$\frac{10\beta}{16} x_1^5 = (1 - \alpha) x_1 + \Phi_k \quad (30')$$

Como vimos anteriormente a percentagem de 3.ª harmónica no fluxo é pequena, sendo assim e atendendo à forma de (30) deveremos esperar que as soluções de (30') sejam vizinhas das soluções x_1 do sistema (30) (31) como passamos a provar.

* * *

Da equação (31) tiramos:

$$p_3 = \frac{x_3}{x_1} = -\frac{\frac{5\beta}{16} x_1^4}{9 - \alpha - \frac{30\beta}{16} x_1^4} \quad (33)$$

Fìsicamente podemos prever soluções em que x_1 tome valores compreendidos entre zero e um valor suficientemente pequeno para que a característica $i = f(\varphi)$ se possa considerar linear, para esses valores o denominador de (33) é positivo.

Como por outro lado estamos considerando soluções em que p_3 é pequeno, segue-se que para os estados de saturação que interessam o nosso estudo o denominador de (33) é sempre positivo.

Se considerássemos soluções para as quais esse denominador pudesse ser negativo deveríamos admitir a possibilidade de ser nulo o que correspondia a $p_3 = \infty$.

Como as equações (30) (31) (32) só são válidas para pequenos valores de p_3, segue-se que não faz sentido discutir essa possibilidade em relação às equações estabelecidas, devendo, uma vez que se quisesse admitir, dar-se outro tratamento analítico ao problema.

Como inicialmente frizamos está fora do domínio do nosso estudo encarar essa possibilidade.

Posto isto podemos concluir de (33) que p_3 é sempre negativo e crescente em valor absoluto com o estado de saturação magnética.

* * *

Seja p_{3M} um limite superior do módulo de p_3 correspondente a qualquer solução considerada.

Discutamos gràficamente as soluções das equações:

$$\frac{10\beta}{16} x_1^5 (1 - 2{,}5\, p_3) = (1 - \alpha)\, x_1 + \Phi_K \quad (30)$$

$$p_3 = \frac{x_3}{x_1} = f(x_1) \quad p_3 < 0$$

$$\frac{10\beta}{16} x_1^5 = (1 - \alpha)\, x_1 + \Phi_K \quad (30')$$

e ainda:

$$\frac{10\beta}{16} x_1^5 (1 + 2{,}5\, p_{M3}) = (1 - \alpha)\, x_1 + \Phi_K \quad (30'')$$

$$p_{3M} > |\, p_3 \,|$$

As soluções reais destas equações serão as abcissas dos pontos de intersecção da recta:

$$y = (1 - \alpha)\, x_1 + \Phi_K \quad (r)$$

com as funções a seguir indicadas:

$$y = \frac{10\beta}{16} x_1^5 (1 - 2{,}5\, p_3) = f(x_1) \quad \rightarrow (30)$$

$$y = \frac{10\beta}{16} x_1^5 = P_1(x_1) \quad \rightarrow (30')$$

$$y = \frac{10\beta}{16} x_1^5 (1 + 2{,}5\, p_{M3}) = P_2(x_1) \rightarrow (30'')$$

As duas últimas são parábolas do 5.º grau e pelo que se disse conclui-se que as parábolas $P_1(x_1)$, $P_2(x_1)$ contém $f(x_1)$ no intervalo por elas definido, isto é:

$$P_1(x_1) < f(x_1) < P_2(x_1) \qquad x_1 > 0$$
$$P_2(x_1) < f(x_1) < P_1(x_1) \qquad x_1 < 0$$

Consideremos então a (fig. 7) onde se representam as duas parábolas P_1, P_2 e dum modo aproximado a função f nelas contida, e discutamos as soluções em função dos parâmetros α e Φ_k da recta (r).

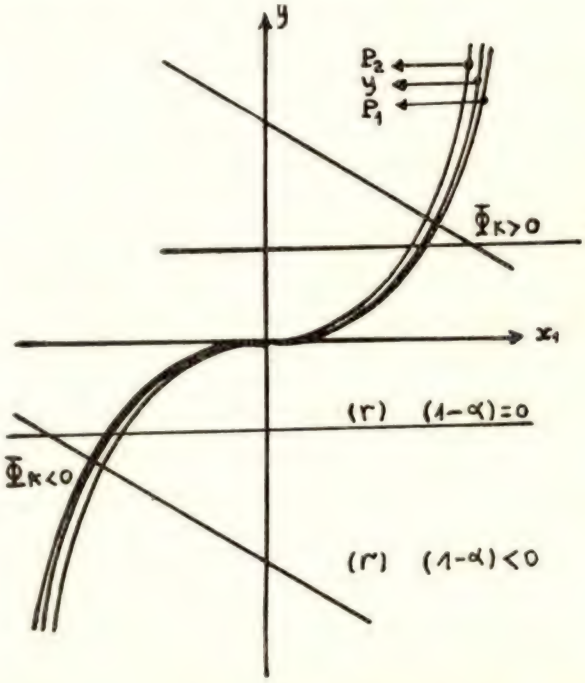


Fig. 7

* * *

1.ª) Hipótese

$$(1-\alpha) < 0$$

Nesta hipótese a recta (r) tem uma inclinação tal que corta para qualquer valor de Φ_k as parábolas P_1 ou P_2 num só ponto e consequentemente (f).

Deste modo, nesta hipótese, só existe para cada valor de Φ_k uma solução x_1 cujo módulo está compreendido entre os módulos das soluções x_1' e x_1'' das equações (30′) e (30″):

$$|x''_1| < |x_1| < |x'_1|$$

As soluções correspondentes a Φ_K e $-\Phi_K$ são iguais e de sinais contrários sendo:

$$\Phi_K > 0 \quad x_1 > 0$$

$$\Phi_K < 0 \quad x_1 < 0$$

2.ª) Hipótese:

$$(1-\alpha) > 0$$

Consideremos de início as soluções de (30′) (fig. 8).

Verifica-se imediatamente que para $\Phi_K < 0$ existe um valor $\Phi_K = \Phi'_{Km}$ para o qual a recta (r) é tangente à parábola P_1 e sendo assim teremos:

$\Phi_K < 0 \qquad |\Phi_K| > |\Phi'_{Km}|$

uma solução negativa $(x'_1)_3$

$0 < |\Phi_K| < |\Phi'_{Km}|$

uma solução negativa $(x'_1)_3$

e duas positivas $(x'_1)_1$ $(x'_1)_2$

Verificando-se:

$$|(x'_1)_3| > |(x'_1)_2| > |(x'_1)_1|$$

As soluções correspondentes a Φ_K $-\Phi_K$ são simétricas e portanto basta discutir as soluções para $\Phi_K < 0$.

Uma discussão semelhante se faria para (30″) existindo também um valor Φ''_{Km} a que corresponde para:

$\Phi_K < 0 \qquad |\Phi_K| > |\Phi''_{Km}|$

uma solução negativa $(x''_1)_3$

$0 < |\Phi_K| < |\Phi''_{Km}|$

uma solução negativa $(x''_1)_3$

e duas positivas $(x''_1)_1$ $(x''_1)_2$

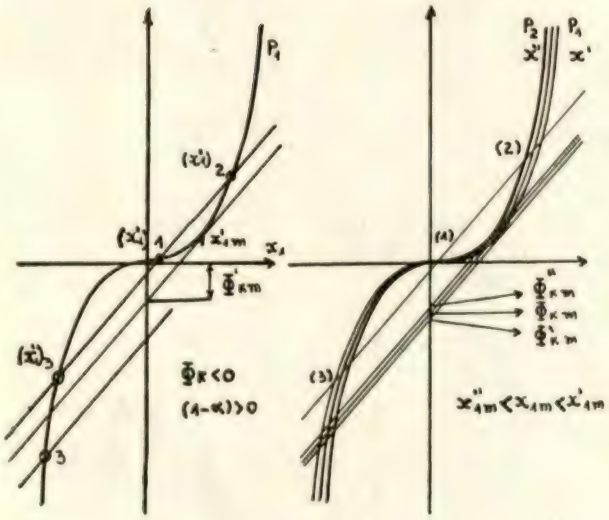


Fig. 8

Da posição relativa de P_1, P_2, e $f(x_1)$ se conclui para a equação (30) a existência dum valor Φ_{Km} com as mesmas propriedades de Φ'_{Km} e Φ''_{Km}.

Deste modo podemos resumir a discussão desta hipótese do seguinte modo:

$\Phi_K < 0$		Existe um valor Φ_{Km} satisfazendo a $\lvert\Phi''_{Km}\rvert < \lvert\Phi_{Km}\rvert < \lvert\Phi'_{Km}\rvert$ que separa dois tipos de soluções da equação (30)
1)	$0 < \lvert\Phi_K\rvert < \lvert\Phi_{Km}\rvert$	Apresenta 3 soluções 1 negativa $(x_1)_3$ 2 positivas $(x_1)_1$ $(x_1)_2$
2)	$\lvert\Phi_K\rvert > \lvert\Phi_{Km}\rvert$	Apresenta uma solução negativa $(x_1)_3$.

Verificando-se as relações:

(3) $\qquad |(x_1)_3| > |(x_1)_2| > |(x_1)_1|$

$$(4) \qquad |(x''_1)_1| > |(x_1)_1| > |(x'_1)_1|$$
$$|(x''_1)_2| < |(x_1)_2| < |(x'_1)_2|$$
$$|(x''_1)_3| < |(x_1)_3| < |(x'_1)_3|$$

* * *

Ficou pois estabelecido que na hipótese de ser: $(1-\alpha) > 0$ o sistema (30) (31) apresenta para determinados valores de Φ_K três soluções reais.

Discutido o sistema, interessa-nos agora determinar com suficiente rigor as soluções correspondentes a um dado Φ_K ou, o que é o mesmo, a uma dada tensão aplicada pois

$$\Phi_K = -\frac{E_K}{\omega} .$$

Vamos supor que ω é constante e que $E_K > 0$ ou seja $\Phi_K < 0$.

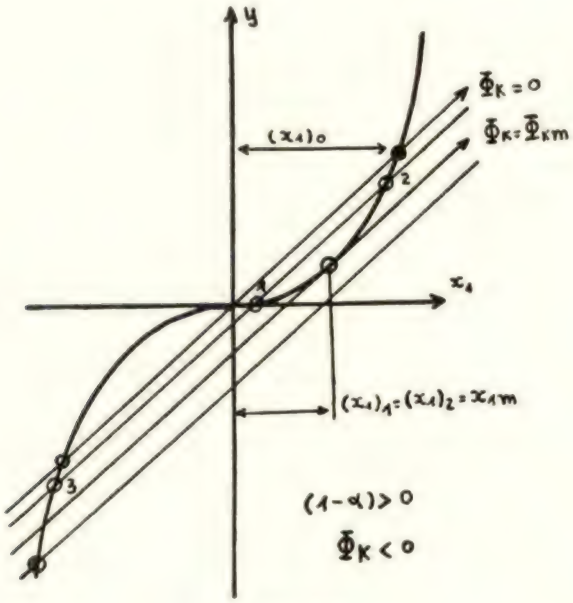


Fig. 9

Consideremos a fig. (9) onde se traçou a função $f(x_1)$ dum modo aproximado, pois já sabemos que é uma função ímpar contida entre duas parábolas do 5.º grau P_1, P_2, traçamos ainda a recta (r) para diversos valores de Φ_K supondo $(1-\alpha) = \text{const.}^e > 0$.

Dentro destas rectas há duas que merecem especial interesse, e que são as rectas correspondentes a $\Phi_K = \Phi_{Km}$ e $\Phi_K = 0$.

Para $\Phi_K = \Phi_{Km}$ teremos as seguintes soluções:

$$(x_1)_3 < 0 \qquad (x_1)_1 = (x_1)_2 = x_{1m} > 0$$

Para $\Phi_K = 0$:

$$(x_1)_3 < 0 \quad (x_1)_1 = 0 \quad (x_1)_2 > 0 \quad |(x_1)_3| = |(x_1)_2| = (x_1)_0$$

Deste modo as soluções positivas x_1 variam, tomando todos os valores, entre 0 e $(x_1)_0$.

As soluções negativas x_1 são sempre de módulo maior ou igual a $(x_1)_0$.

* * *

Nesta altura o problema põe-se do seguinte modo:

1) ou se dá Φ_K e se pretendem as soluções x_1, o que acarreta a resolução complicada do sistema (30) (31)

2) ou damos valores a x_1 e obtemos uma característica $\Phi_K = f(x_1)$ o que indirectamente nos permite resolver o 1.º problema.

O 2.º processo tem a vantagem sobre o primeiro de obtermos uma característica $\Phi_K = f(x_1)$ apenas com os erros inerentes às equações aproximadas (30) (31), mas obriga-nos à construção completa duma característica uma vez que queiramos determinar a solução correspondente a um só valor de Φ_K.

O 1.º processo não apresenta este último inconveniente mas introduz erros superiores devido à resolução complicada do sistema (30) (31).

* * *

Tem especial interesse a determinação de Φ_{Km} e o valor correspondente $x_{1m} = (x_1)_1 = (x_1)_2$ assim como a determinação de $(x_1)_0 = |(x_1)_3| = |(x_1)_2|$.

Estas determinações são de relativa facilidade, e por serem de bastante importância para qualquer das hipóteses consideradas, começamos por fazê-las.

Determinação de Φ_{Km}

Consideremos a equação (30') e comecemos por determinar $\Phi'_{Km} > \Phi_{Km}$ e $x'_{1m} > x_{1m}$ Φ'_{Km} é um ponto de estacionaridade de Φ_K definido por (30')

$$\Phi_K = x_1 (\alpha - 1) + \frac{10\beta}{16} x_1^5 \qquad (30')$$

x'_{1m} obtém-se pois a partir de $\frac{d\Phi_K}{dx_1} = 0$ resultando de (30'):

$$(x'_{1m})^4 = (1-\alpha)\frac{16}{50\beta}$$

$$x'_{1m} = \sqrt[4]{\frac{16}{50\beta}(1-\alpha)} \qquad (34)$$

Substituindo em (30') obtemos:

$$\Phi'_{Km} = -\frac{4}{5}(1-\alpha)\sqrt[4]{\frac{16}{50\beta}(1-\alpha)} \qquad (35)$$

Consideremos a expressão (33)

$$p_3 = -\frac{\frac{5\beta}{16} x_1^4}{9 - \alpha - \frac{30\beta}{16} x_1^4} \qquad (33)$$

Substituindo em (33) x_1 por x'_{1m} obtemos um valor $-p_{3M}$ cujo módulo é superior ao valor que $|p_3|$ toma no ponto correspondente a Φ_{km} pois que $x'_{1m} > x_{1m}$, deste modo teremos um limite superior de $|p_3|$ e portanto podemos calcular $\Phi''_{km} > \Phi_{km}$ e x''_{1m}.

Calculemos pois p_{3M}.

Substituindo em (33) x'_{1m} obtém-se:

$$p_{3M} = \frac{1-\alpha}{84 - 4\alpha} \simeq \frac{1-\alpha}{84} \qquad (36)$$

pois que $84 >> 4\alpha$ para o nosso caso, além de que deverá ser sempre na hipótese que estamos considerando $1 > \alpha$.

Deste modo podemos agora escrever a equação (30'')

$$\Phi_k = \frac{10\beta}{16} x_1^5 \left(1 + \frac{2{,}5(1-\alpha)}{84}\right) + (\alpha - 1) x_1 \qquad (30'')$$

em que se substituíu p_{3M} por (36)

Determinando-se agora x''_{1m} obtém-se:

$$x''_{1m} = \sqrt[4]{(1-\alpha)\frac{16}{50\beta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2{,}5(1-\alpha)}{84}}}$$

Expressão que dado o pequeno valor de

$$\frac{2{,}5\ (1-\alpha)}{84}$$

se pode escrever sob a forma:

$$x''_{1m} = \left(1 - \frac{2{,}5(1-\alpha)}{84 \times 4}\right)\sqrt[4]{\frac{16}{50\beta}(1-\alpha)} \qquad (37)$$

Φ''_{Km} obtém-se substituindo x''_{1m} em (30'') resultando:

$$\Phi''_{Km} =$$

$$= -\left(1 - \frac{2{,}5(1-\alpha)}{84 \times 4}\right)\frac{4}{5}(1-\alpha)\sqrt[4]{\frac{16}{50\beta}(1-\alpha)} \qquad (38)$$

Chamando a

$$\frac{2{,}5(1-\alpha)}{84 \times 4} = \varepsilon_x$$

e atendendo às expressões (34) e (35) podemos escrever:

$$x''_{1m} = (1 - \varepsilon_x)\, x'_{1m} \qquad (39)$$

$$\Phi''_{Km} = (1 - \varepsilon_x)\, \Phi'_{Km} \qquad (40)$$

Como

$$x''_{1m} < x_{1m} < x'_{1m}$$

e

$$\Phi''_{Km} < \Phi_{Km} < \Phi'_{Km}$$

segue-se que o erro cometido em tomar Φ'_{Km} e x'_{1m} por Φ_{Km} e x_{1m} é inferior a ε_x.

Vejamos agora qual o valor de ε_x.

$$\varepsilon_x = \frac{2{,}5\,(1-\alpha)}{84 \times 4} < \frac{2{,}5}{4 \times 84} \quad \text{pois é } 1-\alpha > 0$$

Determinamos assim um limite superior do erro independente de quaisquer parâmetros e que vale $\simeq 0{,}75\,\%$.

Conclusão importante: utilizando a equação (30') podemos determinar Φ_{Km} e x_{1m} com um erro inferior a $0{,}75\,\%$.

* * *

Determinação de $(x_1)_0$.

A determinação de $(x_1)_0$ pode-se fazer directamente sem cálculos complicados.

Eliminemos x_3 entre as equações (30) (31); obtem-se:

$$\Phi_K = (\alpha-1)\,x_1 + \frac{10\,\beta}{16}\,x_1^5 + \frac{25\,\beta}{16}\,\frac{\frac{5\,\beta}{16}\,x_1^9}{9-\alpha-\frac{30\,\beta}{16}\,x_1^4} \qquad (41)$$

Fazendo $\Phi_K = 0$ eliminando a solução $x_1 = 0$ correspondente a $(x_1)_1$ e fazendo $\frac{5\,\beta}{16}\,x_1^4 = x$ obtemos a equação:

$$(\alpha-1) + 2\,x + \frac{5\,x^2}{9-\alpha-6\,x} = 0$$

Equação que resolvida nos dá, feitas simplificações devidas ao pequeno valor de α e escolhida a raiz adequada à natureza das soluções consideradas:

$$x = \frac{3}{7}\left(1 - \frac{5}{6}\,\alpha\right) \qquad (42)$$

ou ainda por ser:

$$x = \frac{5\,\beta}{16}\,x_1^4$$

$$(x_1)_0 = \sqrt[4]{\frac{48\,(1-\frac{5}{6}\,\alpha)}{35\,\beta}} \qquad (43)$$

Esta expressão contudo só é válida para α pequeno devendo para outros casos resolver-se (42) e utilizar a expressão completa da raiz conveniente.

* * *

Deste modo ficam estabelecidas as expressões de Φ_{km}, x_{1m} e ainda o modo como podemos calcular x_{10}.

Vejamos agora como resolver pràticamente os dois problemas.

1) *Dado* Φ_k *determinar* x_1

a) Começamos por determinar x_{1m} e Φ_{km} pelas expressões anteriormente obtidas para x'_{1m} e Φ'_{km}.

b) Resolvemos gràficamente a equação (30') e obtemos os soluções x'_1 correspondentes ao Φ_k considerado assim como

$$p'_3 = \frac{x'_3}{x'_1}$$

c) Vamos em seguida obter as soluções de (30) a partir do conhecimento das soluções de (30') que sabemos serem vizinhas.

Para isso deduzimos uma fórmula de correcção pelo processo de Newton obtendo-se x_1 de x'_1 e p'_3 pela relação:

$$x_1 = x'_1\left(1 + \frac{\frac{25\,\beta}{16}\,x'^4_1\,p'_3}{(\alpha-1) + \frac{50\,\beta}{16}\,x'^4_1 - \frac{225\,\beta}{16}\,p'_3 x'^4_1}\right) \qquad (44)$$

Esta fórmula não é aplicável na vizinhança de x'_{1m}.

As soluções $(x'_1)_1$ não necessitam de ser corrigidas.

As soluções $(x'_1)_3$ são aquelas que necessitam de correcção contudo, como veremos, não se afastam mais de $6\,\%$ de $(x_1)_3$.

As soluções $(x'_1)_2$ deverão ser corrigidas embora quase não necessitem quando $(x'_1)_2$ se aproxime de x'_{1m}.

Fica assim resolvido o 1.º problema.

2) *Determinar a característica* $\Phi_k = f(x_1)$ para $\Phi_k < 0$

a) Começamos por determinar $(x_1)_0$.

b) Damos a x_1 valores positivos compreendidos entre 0 e $(x_1)_0$.

Neste intervalo Φ_k tem um mínimo correspondente a x_{1m} e que sabemos ser Φ_{km}.

c) Damos a x_1 valores negativos de módulo superior a $(x_1)_0$.

Obtemos assim a característica $\Phi_k = f(x_1)$ $\Phi_k < 0$ com um erro apenas proveniente da aproximação feita no cálculo de ${}^5\chi_1$ e ${}^5\chi_3$.

10 — Interpretação física das soluções

Atendendo às expressões:

$$\alpha = \frac{a}{\omega^2 c} \quad \beta = \frac{b}{\omega^2 c} \quad \Phi_K = -\frac{E_K}{\omega}$$

podemos finalmente concluir:

a) Se $\left(1 - \frac{a}{\omega^2 c}\right) \leq 0$

o circuito apresenta uma única solução x_1 para cada valor de E_K sendo:

$$x_1 < 0 \quad \text{para } E_K > 0$$

b) Se $\left(1 - \frac{a}{\omega^2 c}\right) > 0$

o circuito apresenta para:

$0 < E_K < E_{Km}$ três soluções, duas positivas e uma negativa

$E_K > E_{Km}$ apresenta uma só solução negativa

sendo:

$$E_{km} = -\omega \Phi_{km}$$

* * *

Vejamos agora o que significa uma solução positiva ou negativa. Suponhamos determinado φ

$$\varphi = x_1 \operatorname{sen} \omega t + x_3 \operatorname{sen} 3\,\omega t + x_5 \operatorname{sen} 5\,\omega t + \ldots$$

Substituindo φ na relação: $i = a\varphi + b\varphi^5$ e atendendo às expressões ${}^5\chi_1$ ${}^5\chi_3$ ... é fácil obter-se para a corrente i o seguinte desenvolvimento:

$$i = (a\,x_1 + b\,{}^5\chi_1) \operatorname{sen} \omega t +$$
$$+ (a\,x_3 + b\,{}^5\chi_3) \operatorname{sen} 3\,\omega t +$$
$$+ (a\,x_5 + b\,{}^5\chi_5) \operatorname{sen} 5\,\omega t + \ldots$$

sendo fácil ainda concluir a partir da expressão de ${}^5\chi_1$ que esta toma o sinal de x_1

Considerando as amplitudes Φ_1 e I_1 positivas isto é:

$$\Phi_1 = |x_1| \qquad I_1 = |a\,x_1 + b\,{}^5\chi_1|$$

conclui-se fàcilmente que para:

$x_1 > 0$ será $\varphi = \Phi_1 \operatorname{sen} \omega t + \ldots$

$i = I_1 \operatorname{sen} \omega t + \ldots$

$x_1 < 0$ será $\varphi = \Phi_1 \operatorname{sen} (\omega t + \pi) + \ldots$

$i = I_1 \operatorname{sen} (\omega t + \pi) + \ldots$

Atendendo a que $e_K = E_K \operatorname{sen} (\omega t + \delta)$ e que se fez $\delta = \frac{\pi}{2}$ teremos:

$$e_K = E_K \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Deste modo uma solução positiva significa que a fundamental da corrente está em quadratura e atraso em relação à tensão e_K, representa pois um estado indutivo.

Uma solução negativa significa que a fundamental da corrente está em quadratura e avanço em relação a e_K, representando portanto um estado capacitivo.

* * *

Examinemos agora as soluções correspondentes a $E_K = 0$.

Uma das soluções é $(x_1)_1 = 0$, sem interesse.

As outras soluções são $|(x_1)_3| = (x_1)_2 = (x_1)_0$ estas duas soluções representam regimes livres que estabelecem a transição do estado indutivo para o capacitivo.

Embora não seja nosso objecto o estudo do regime livre do circuito faremos oportunamente uma referência a estes estados.

11 — Estabilidade

Suposta realizada a condição $\left(1 - \frac{a}{\omega^2 c}\right) > 0$ analisemos a estabilidade das 3 soluções.

Afim de facilitar esta análise vamos construir a característica $E_K = f(I_1)$ o que faremos utilizando os valores teóricos determinados numa aplicação numérica (fig. 10).

O andamento das características $E_K = f(I_1)$ é semelhante ao das características $E_K = f(x_1)$ o que se compreende se atendermos ao facto de I_1 ser uma função crescente de x_1. Assim, os valores de I_1 correspondentes a x_1 sucedem-se pela mesma ordem.

Ao valor $(x_1)_0$ corresponde uma corrente de amplitude I_0.

I_1 representa a amplitude da fundamental da corrente e é sempre $I_1 > 0$ devendo notar-se que para $I_1 > I_0$ o circuito é capacitivo.

O critério que vamos seguir na análise da estabilidade será o seguinte:

— Supor que se realiza o estado de equilíbrio que pretendemos analisar, e admitir que a tensão E_K se mantém constante.

— Considerar uma perturbação ΔI_1 na corrente.

Então, o estado considerado será:

— Estável se o circuito reagir de modo a conduzir a corrente ao valor inicial, isto é, reagir de modo a provocar na corrente uma variação $\Delta' I_1$ de sinal contrário a ΔI_1.

— Instável se a reacção for do mesmo sinal de ΔI_1.

Vamos definir a impedância do circuito relativa à harmónica fundamental por $Z_1 = \frac{E_K}{I_1}$.

Notemos ainda que a característica $E_K = f(I_1)$ dum circuito que tivesse impedância constante e igual à do circuito considerado, seria a recta que passa pela origem e pelo ponto correspondente da característica.

Consideremos então os três pontos P_1, P_2, P_3 correspondentes à tensão E_K: $P_1 <> (x_1)_1$ $P_2 <> (x_1)_2$ $P_3 <> (x_1)_3$.

Ponto P_1:

Suponhamos uma perturbação que diminui a corrente de ΔI_1 e o ponto P_1' correspondente.

Traçando a recta de impedância relativa a P_1' e supondo constante E_K, verifica-se que o circuito tende nesse ponto para o estado representado pela intersecção da recta de impedância com a recta da tensão E_K, isto é, a corrente tende a aumentar.

Se se considerasse P_1'', concluíamos que a corrente tendia a diminuir.

Deste modo, o ponto P_1 corresponde a um estado de equilíbrio estável.

Ponto P_2:

Aumentando a corrente de ΔI_1, traçada a recta relativa a P_2'' e fazendo a mesma construção, verifica-se que a tendência da corrente é aumentar ainda mais.

Para P_2' verifica-se que a tendência é diminuir.

Portanto este estado é instável.

Ponto P_3:

Usando a mesma construção geométrica e o mesmo raciocínio conclui-se que este estado também é estável. Indicamos na figura a construção.

Qualquer ponto do ramo decrescente é idêntico a P_2 e quaisquer pontos dos 1.º e 2.º ramos crescentes são idênticos respectivamente a P_1, P_3.

Deste modo conclui-se que a condição de estabilidade ou instabilidade é respectivamente E_K ser uma função crescente ou decrescente de I_1.

Analìticamente será:

Equilíbrio estável para $\frac{\partial E_K}{\partial I_1} > 0$.

Equilíbrio instável para $\frac{\partial E_K}{\partial I_1} < 0$.

12 — Comportamento do círcuito para variações da amplitude da tensão aplicada

Suponhamos que vamos aplicar ao circuito uma tensão cuja amplitude E_K é variável a partir de zero. Supomos ainda que o condensador está descarregado.

De acordo com as considerações feitas sobre estabilidade segue-se que:

1.º — Os primeiros pontos de funcionamento situam-se no 1.º ramo crescente.

2.º — Aumentando de modo contínuo a tensão, o ponto de funcionamento desloca-se contìnuamente ao longo deste ramo.

3.º — Suponhamos que chegámos ao valor E_{Km}. A partir deste instante a característica $E_K = f(I_1)$ é decrescente e então, se estável. Deste modo verificamos que, quando variamos a tensão dum modo contínuo, temos, no ponto E_{Km}, uma descontinuidade para a corrente que passa bruscamente dum valor I_{1m} para outro $(I_1)_3$ (fig 10).

5.º — Se continuarmos a aumentar a tensão temos novos estados de equilíbrio estável ao longo do 2.º ramo crescente.

6.º — Suponhamos agora que diminuimos a tensão até à vizinhança de zero, correspondendo a qualquer destes valores, estados de equilíbrio estável.

7.º — Quando chegamos ao ponto $E_K = 0$ temos um estado que corresponde a uma corrente I_0 (regime livre). Se aumentarmos agora a tensão voltamos ao ramo crescente. Deste modo também aqui é vedada a entrada na região de equilíbrio instável.

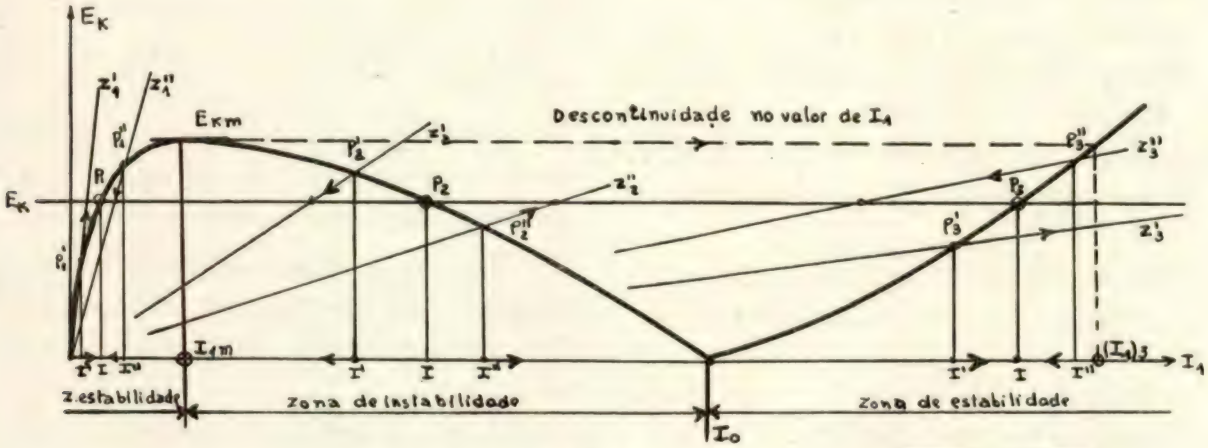


Fig. 10

diminuirmos a tensão E_K, verifica-se, traçando a recta de impedância relativa a esse estado, que o ponto de funcionamento se desloca ainda no 1.º ramo para o ponto correspondente à tensão E_K aplicada.

Deste modo verifica-se a impossibilidade de entrarmos na região decrescente da característica.

4.º — Suponhamos agora que aumentamos E_K para $E'_K > E_{Km}$. Então, a tendência da corrente será aumentar e tomar valores correspondentes à região de instabilidade. Sendo assim a corrente aumenta cada vez mais até que toma valores correspondentes à 2.ª região de estabilidade e então aí cresce até se fixar num ponto de funcionamento

Verifica-se portanto que, em determinadas circunstâncias, o circuito considerado apresenta uma descontinuidade no valor da corrente.

O estabelecimento brusco duma sobre-corrente ocasiona o estabelecimento brusco de sobre-tensões na bobina e na capacidade.

Devido ao efeito da saturação magnética estas sobre-tensões revestem-se de menor importância na bobina do que na capacidade.

Pràticamente a relação de tensões no condensador é a mesma que a relação de correntes enquanto que na bobina é a relação dos fluxos correspondente.

(Continua)

A NOSSA CAPA

A fotografia da capa mostra um torno vertical Berthiez instalado nas Oficinas Mecânicas da Companhia União Fabril, no Barreiro.

É de notar, o facto de ser a máquina de maior porte, no género, existente na Península Ibérica.

As suas características principais são:

Diâmetro do prato — 2800 mm.

Diâmetro max. a tornear — 6000 mm.

Altura útil entre o prato e braço — 2000 mm.

Potência do motor principal — 30 c. v.

18 Velocidades de rotação do prato — entre 1 e 60 r. p. m.

16 avanços independentes para cada porta ferramenta entre 0,1 e 6 mm

Tolerâncias de acordo com as normas do Prof. Scheilinger.

Peso máximo das peças a tornear — 30 ton.

Peso bruto aproximado — 50.000 Kg

O prato da máquina gira na máxima velocidade a 60 r. p. m. e por isso a par da sua capacidade excepcional este torno pode tornear com rendimento peças até cerca de 250 mm. de diâmetro.

Cada um dos carros do suporte de ferramenta está equipado com movimento rápido o que é extremamente útil pela rapidez dos deslocamentos do carro e pela comodidade para o operador.

O motor principal pode ser inteiramente comandado em qualquer dos carros do suporte da ferramenta.

O circuito do motor principal só fica ligado à corrente depois da bomba de óleo da lubrificação estar em funcionamento.

Deste modo torna-se impossível uma gripagem por descuido do operador.

Estudo estático da obtenção de ácido fosfórico por via húmida

PELO ENG.º QUÍMICO-INDUSTRIAL LUÍS A. DE ALMEIDA ALVES
(Assistente do I. S. T.)

C. D. 661.6

Introdução

O processo de obtenção de ácido orto-fosfórico, por via húmida, consiste no ataque dos fosfatos tricálcicos naturais (com um teor compreendido, em geral, entre 55 % e 75 %), por ácido sulfúrico, em condições tais que permitam a separação fácil do sulfato de cálcio formado, por espessamento ou por filtração.

A reacção do ácido sulfúrico sobre o fosfato tricálcico é representada pela equação:

$$3\ SO^4\ H^2 + (PO^4)^2\ Ca^3 + \\ + 3\ b\ OH^2 \rightleftarrows 3\ SO^4\ Ca\ .\ b\ OH^2 + \\ + 2\ PO^4\ H^3 + Q \text{ calorias.}$$

A condição de equilíbrio desta reacção é expressa pela relação seguinte:

$$\frac{a_2^2}{a_1^3\ .\ a_{OH^2}^{3b}} = K \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

sendo K a constante de equilíbrio e a_1, a_2 e a_{OH^2} as actividades respectivamente do ácido sulfúrico, do ácido fosfórico e da água. Os valores das actividades vão ser calculados a partir das molalidades respectivas e dos coeficientes de actividade, e, portanto, os valores de a_1 e de a_2 dependem do coeficiente b, o qual, por sua vez, vai intervir directamente no equilíbrio. A influência de b em a_1 e a_2 não introduz nenhuma dificuldade de cálculo; pelo contrário, a consideração da actividade da água vai complicar extraordinàriamente o estudo, porque, além de dar origem a um desenvolvimento analítico muito trabalhoso, apresenta ainda a impossibilidade prática de encontrar, na literatura, valores de a_{OH^2} nas misturas de ácido sulfúrico e de ácido fosfórico ([1]); por este motivo, e atendendo a que, durante o processo, não há grandes variações de concentração total, vamos admitir que a actividade da água se mantém constante, a menos que essa hipótese introduza alguma anomalia nos resultados.

Deve notar-se que, além desta, é necessário introduzir ainda, mais três hipóteses:

1) As actividades de cada um dos ácidos misturados são iguais às que teriam considerados isoladamente.

2) As actividades são constantes em função da temperatura, dentro dos limites em que se vai trabalhar.

3) O grau de dissociação dos ácidos é pràticamente nulo.

Estas três hipóteses não correspondem rigorosamente à realidade, mas é necessário partir delas, visto que não é possível dispor de dados que as dispensem.

CAPÍTULO I

MOLALIDADES OBTIDAS

a) *Valores do coeficiente b*

Verifica-se experimentalmente que o sulfato de cálcio pode ser obtido sob a forma de gesso ($SO^4Ca\ .\ 2OH^2$), hemi-hidrato ($SO^4\ Ca\ .\ \frac{1}{2}\ OH^2$) e anidrite ($SO^4\ Ca$), sendo as

([1]) A determinação dessas actividades está completamente fora do âmbito dos trabalhos de investigação directamente aplicados à Indústria.

respectivas zonas de formação indicadas na figura 1 [1], em função da temperatura e da percentagem de P^2O^5 que se obtém.

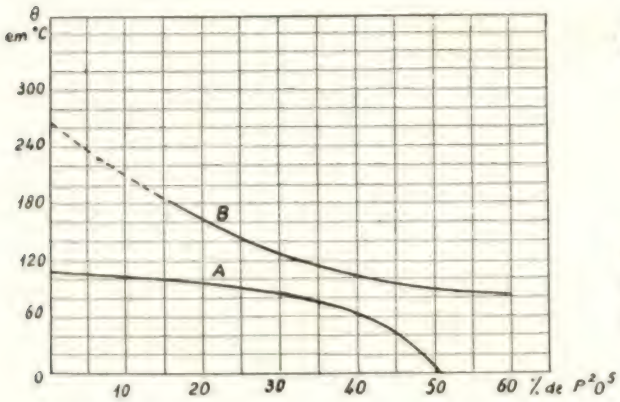


Fig. 1

Desta figura, conclui-se que, para temperaturas usuais (superiores a 25° C), a obtenção de baixos teores em P^2O^5 corresponde à formação de gesso ($b = 2$) sendo os teores mais elevados acompanhados da formação de anidrite ($b = 0$) e de hemi-hidrato $\left(b = \frac{1}{2}\right)$. (A percentagem máxima teórica é, evidentemente $100 \times \frac{P^2O^5}{PO^4H^3} = 72{,}6\,\%$).

b) *Cálculo das molalidades*

Seja x a conversão obtida num dado instante e n o número de moléculas de cada um dos ácidos; atribuindo ao ácido sulfúrico o índice 1 e ao ácido fosfórico o índice 2, vem

$$x = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Se for n_i o número inicial de moléculas de ácido sulfúrico, será

$$n_1 = n_i - \frac{3}{2} n_2 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Resolvendo o sistema das equações (2) e (3), obtém-se

$$n_1 = \frac{2\, n_i\, (1 - x)}{2 + x} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$n_2 = \frac{2\, n_i\, x}{2 + x} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Se for M_i a massa inicial de ácido sulfúrico com uma fracção y de SO^4H^2 e M a sua massa molecular será

$$n_i = \frac{M_i\, y}{M} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Atendendo a que as massas moleculares dos dois ácidos são iguais e têm o valor comum $M = 98$ gr, as expressões (4) e (5) transformam-se nas seguintes:

$$n_1 = \frac{M_i\, y\, (1 - x)}{49\, (2 + x)} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$n_2 = \frac{M_i\, y\, x}{49\, (2 + x)} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Desprezando a água existente no fosfato (da ordem de grandeza de 1 %), a água que intervém na reacção é a que é introduzida pelo ácido sulfúrico, tendo a sua massa M'_i o valor

$$M'_i = M_i\, (1 - y) = \frac{M\, n_i\, (1 - y)}{y} \quad (9)$$

Quando só existirem n_i moléculas de SO^4H^2 a massa de água M', será

$$M' = \frac{M\, n_i\, (1 - y)}{y} = \frac{2\, M_i\, (1 - y)\, (1 - x)}{2 + x} \quad (10)$$

Por outro lado, quando se transforma uma massa M''_i de ácido sulfúrico em ácido fosfórico, obtêm-se as massas M'' e M''' de PO^4H^3 e de OH^2, cujos valores são:

$$M'' = \frac{2}{3}\, y\, M''_i \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$M''' = (1 - y)\, M''_i \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Mas a massa de ácido sulfúrico que se transforma é a correspondente a $(n_i - n_2)$ moléculas e, portanto,

$$M''_i = \frac{M\, (n_i - n_1)}{y} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

[1] Parrish and Ogilvie, «Calcium Superphosphate and Compound Fertilizers» 1.ª edição, pág. 178.

Combinando as equações (4) e (6), substituindo em (13) e entrando com os valores achados em (11) e (12), obtém-se

$$M''_i = \frac{3\,M_i\,x}{2+x} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

$$M'' = \frac{2\,M_i\,y\,x}{2+x} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

$$M''' = \frac{3\,M_i\,(1-y)\,x}{2+x} \quad \ldots \quad (16)$$

Parte da água existente vai ser absorvida na formação dos hidratos, na relação de $\frac{3\,b}{2}$ moléculas por molécula de PO^4H^3, ou seja de uma massa de 0,276 b por unidade de massa de PO^4H^3; o valor total M^{IV} será portanto

$$M^{IV} = 0{,}276\,b\,M'' = \frac{0{,}552\,b\,M_i\,y\,x}{2+x} \quad (17)$$

Somando os valores de M' e M''' e subtraindo M^{IV}, obtém-se a massa total M_{OH^2} de água que fica livre:

$$M_{OH^2} = \frac{M_i\,\{2\,(1-y)+[1-(1+0{,}552\,b)\,y]\,x\}}{2+x} \quad (18)$$

As molalidades m_1 e m_2 serão, portanto

$$m_1 = \frac{20{,}4\,y\,(1-x)}{2\,(1-y)+[1-(1+0{,}552\,b)\,y]\,x}$$

$$m_2 = \frac{20{,}4\,y\,x}{2\,(1-y)+[1-(1+0{,}552\,b)\,y]\,x}$$

A sua relação será

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1-x}{x}$$

c) *Valor máximo da molalidade final*

Admitindo que se obtinha uma conversão $x = 1$, a molalidade m_2 obtida seria

$$m_2 = \frac{6{,}8\,y}{1-(1+0{,}184\,b)\,y}$$

Desta expressão conclui-se que, para um dado valor de y, o valor de m_2 cresce com b e, portanto, convém estudar a variação de m_2 com y para cada valor de b. Os valores obtidos estão sistematizados no Quadro I, a partir do qual se traçaram as curvas da figura 2; os valores de y foram obtidos a partir das molalidades iniciais m_i pela expressão evidente

$$y = \frac{m_i}{10{,}2 + m_i}$$

Quadro I

Valores máximos de m_2

m_i	b / y	0	$\frac{1}{2}$	2
1	0,089	0,66	0,67	0,69
2	0,164	1,34	1,36	1,43
3	0,227	1,95	2,05	2,22
4	0.281	2,66	2,75	3,10
5	0,329	3,33	3,50	4,06
10	0,494	6,64	7,28	10,30
15	0,598	10,10	11,30	22,10
20	0,662	13,30	16,30	46,50

Desta figura, conclui-se que convém trabalhar na zona de formação do gesso, visto que, para obter uma dada molalidade final se pode partir de um valor de y inferior. Conjugando os valores das figuras 1 e 2, é possível estabelecer para cada temperatura θ (em graus centígrados), os valores máximos de y que convém utilizar, como se indica no Quadro II; neste quadro, os valores de m_2 são calculados a partir da expressão

$$m_2 = \frac{10{,}2\,p'}{100-p'}$$

sendo p' a percentagem de PO^4H^3 (e p a percentagem de P^2O^5).

Quadro II

θ	p	p'	m_2	y
20	48,5	67,0	20,7	0,59
30	47	65,0	18,9	0,58
40	45,5	63,0	17,4	0,57
50	43,5	60,2	15,1	0,55
60	41	56,8	13,1	0,53
70	37,5	51,8	10,9	0,50
80	32,5	44,9	8,15	0,465
90	25,5	35,2	5,45	0,385
100	15	20,7	2,61	0,25

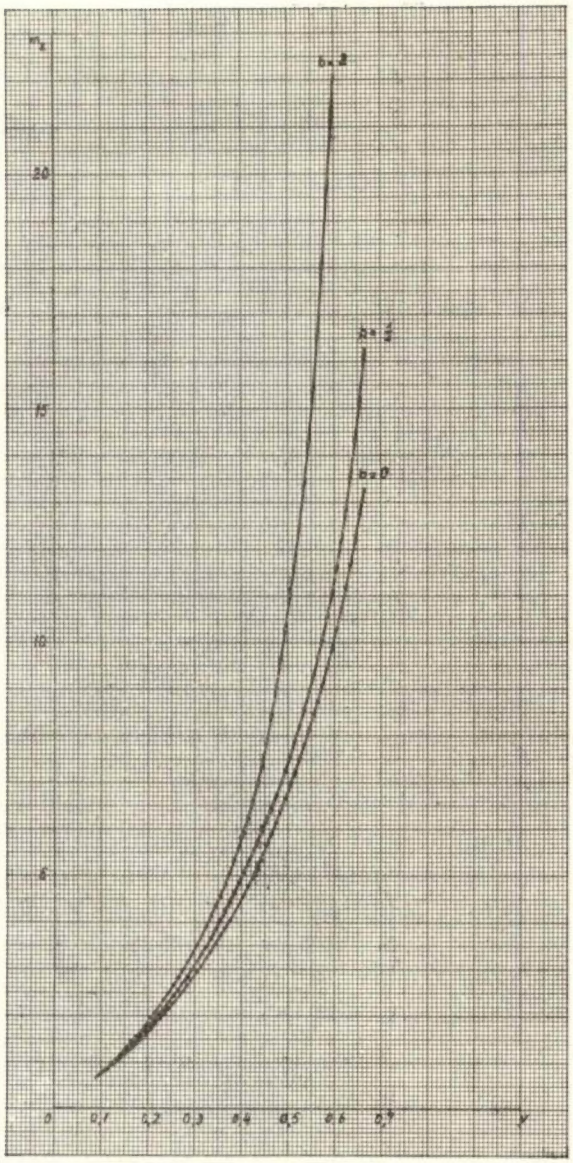


Fig. 2

Atendendo à exotermicidade da reacção, a temperatura eleva-se até cerca de 70° C e, portanto, a obtenção de gesso só tem interesse, teòricamente, até ao valor $m_2 = 10,9$, a que corresponde $y = 0,50$ ou, aproximadamente, $m_1 = 10$. Para obter molalidades finais superiores, ter-se-á de partir de $y > 0,59$ ou $y > 0,61$, conforme se formar hemi-hidrato ou anidrite; as condições máximas de obtenção do mono-hidrato são indicadas no Quadro III, obtido do mesmo modo do Quadro II.

Quadro III

θ	p	p′	m_2	y
90	47,5	65,8	19,6	0,69
100	42	58,0	14,05	0,64
110	37	51,2	10,7	0,59
120	32,5	44,8	8,1	0,52
130	29	40,0	6,8	0,48
140	26	35,9	5,6	0,43
150	22,5	31,1	4,5	0,38

Da análise dos quadros II e III, podem estabelecer-se, em princípio (visto que o estudo do equilíbrio não está ainda feito), as seguintes linhas gerais: Até 37,5 % de P^2O^5, pode trabalhar-se a frio (abaixo de 70°), obtendo-se o sulfato de cálcio sob a forma de gesso; para obter concentrações mais elevadas tem de se trabalhar a quente, mas só se aproveita a formação do hemi-hidrato abaixo de 110°. A fixação definitiva dos processos a escolher depende ainda do estudo do equilíbrio e das condições de separação do sulfato de cálcio formado.

CAPÍTULO II

ESTUDO DO EQUILÍBRIO

a) *Considerações gerais*

Consideremos de novo a equação (1) e admitamos que a_{OH^2} é constante; obter-se-á

$$\frac{a_2^2}{a_1^3} = K' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Introduzindo os coeficientes de actividade γ_1 e γ_2, ter-se-á

$$a_1 = \gamma_1 \, m_1 = \frac{20,4 \, \gamma_1 \, y \, (1 - x)}{2 \, (1 - y) + [1 - (1 + 0,552 \, b) \, y] \, x}$$

$$a_2 = \gamma_2 \, m_2 = \frac{20,4 \, \gamma_2 \, y \, x}{2 \, (1 - y) + [1 - (1 + 0,551 \, b) \, y] \, x}$$

Substituindo os valores das actividades na equação (17) e fazendo $K'' = 20,4 \, K'$, obtém-se

$$\frac{x^2 \{ 2 \, (1 - y) + [1 - (1 + 0,552 \, b) \, y] \, x \}}{(1 - x)^3} = K'' y \, \frac{\gamma_1^3}{\gamma_2^2}$$

ou

$$\frac{x^2 (r + s x)}{(1 - x)^3} = K'' y \frac{\gamma_1^3}{\gamma_2^2} = K'' \beta ,$$

fazendo

$$r = 2 (1 - y)$$

$$s = 1 - (1 + 0{,}552 b) y$$

$$\beta = y \frac{\gamma_1^3}{\gamma_2^2}$$

Estudemos cada um dos membros separadamente, fazendo

$$\varphi (x) = \frac{x^2 (r + s x)}{(1 - x)^3} .$$

Ter-se-á :

$$\varphi' (x) = \frac{(3 s + r) x^2 + 2 r x}{(1 - x)^4}$$

$$\varphi'' (x) = \frac{2 (3 s + r) x^2 + 2 (3 s + 4 r) x + 2 r}{(1 - x)^5}$$

Como $x \leqslant 1$, os denominadores são sempre positivos e, portanto, só interessa considerar os numeradores das fracções:

$$\psi (x) = (3 s + r) x^2 + 2 r x$$

$$\theta (x) = 2 (3 s + r) x^2 + 2 (3 s + 4 r) x + 2$$

1) Para que φ (x) seja crescente, terá de ser

$$\psi (x) > 0$$

$$[5 - (5 + 1{,}656 b y)] x + 4 (1 - y) > 0$$

atendendo a que $x > 0$ na região em estudo. Desta expressão tira-se

$$y < \frac{4 + 5 x}{4 + (5 + 1{,}656 b) x}$$

Estudemos a variação de y com x. Substituindo a desigualdade por uma equação e derivando, tem-se

$$y' = \frac{- 6{,}604 b}{[4 + (5 + 1{,}656 b) x]^2}$$

O valor de y decresce sempre com x e como para $x = 0$ é $y = 1$, resta só determinar y para o caso mais desfavorável que corresponde a $x = 1$; terá de ser, portanto

$$y < \frac{9}{9 + 1{,}656 b}$$

2) Para que φ (x) tenha a concavidade voltada para cima, será

$$\theta (x) > 0 ,$$

ou

$$2 [5 - (5 + 1{,}656 b) y] x^2 + 2 [11 - (11 + 1{,}656 b) y] x + 4 (1 - y) > 0 ,$$

de onde se tira

$$y > \frac{10 x_2 + 22 x + 4}{(10 + 3{,}312 b) x^2 + (22 - 3{,}312 b) x + 4}$$

Procedendo como no caso anterior, vem

$$y' = \frac{13{,}218 b (3 x^2 + 2 x + 1)}{[(10 + 3{,}3 12 b) x^2 + (22 - 3{,}312 b) x + 4]^2}$$

Para $b = 0$, não interessa o estudo porque y é constantemente igual a 1; para $b \neq 0$, $y' < 0$, a função é decrescente e, na pior das hipóteses, será também

$$y < \frac{9}{9 + 1{,}656 b}$$

Os valores de φ (x) em função de x são dados no quadro IV.

Quadro IV

x	φ (x)
0	0
0,1	0,0137 (r + 0,1 s)
0,2	0,0785 (r + 0,2 s)
0,3	0,265 (r + 0,3 s)
0,4	0,740 (r + 0,4 s)
0,5	2,000 (r + 0,5 s)
0,6	5,620 (r + 0,6 s)
0,7	18 (r + 0,7 s)
0,8	80 (r + 0,8 s)
0,9	810 (r + 0,9 s)
1	∞

Para determinar o segundo membro há que calcular, em primeiro lugar, os valores de m_1 e m_2 em função de x, os quais se indicam no quadro V.

Quadro V

x	m_1	m_2
0	$\frac{10,2\,y}{1-y}$	0
0,1	$\frac{18,36\,y}{2,1-(2,1+0,0522\,b)\,y}$	$\frac{2,04\,y}{2,1-(2,1+0,0552\,b)\,y}$
0.2	$\frac{16,32\,y}{2,2-(2,2+0,1104\,b)\,y}$	$\frac{4,08\,y}{2,2-(2,2+0,1104\,b)\,y}$
0,3	$\frac{14,28\,y}{2,3-(2,3+0,1656\,b)\,y}$	$\frac{6,12\,y}{2,3-(2,3+0,1656\,b)\,y}$
0,4	$\frac{12,24\,y}{2,4-(2,4+0,2208\,b)\,y}$	$\frac{8,16\,y}{2,4-(2,4+0,2208\,b)\,y}$
0,5	$\frac{10,2\,y}{2,5-(2,5+0,276\,b)\,y}$	$\frac{10,2\,y}{2,5-(2,5+0,276\,b)\,y}$
0,6	$\frac{8,16\,y}{2,6-(2,6+0,3312\,b)\,y}$	$\frac{12,24\,y}{2,6-(2,6+0,3312\,b)\,y}$
0,7	$\frac{6,12\,y}{2,7-(2,7+0,3864\,b)\,y}$	$\frac{14,28\,y}{2,7-(2,7+0,3864\,b)\,y}$
0,8	$\frac{4,08\,y}{2,8-(2,8+0,4416\,b)\,y}$	$\frac{16,32\,y}{2,8-(2,8+0,4416\,b)\,y}$
0,9	$\frac{2,04\,y}{2,9-(2,9+0,4968\,b)\,y}$	$\frac{18,36\,y}{2,9-(2,9+0,4968\,b)\,y}$
1	0	$\frac{20,4\,y}{3-(3+0,552\,b)\,y}$

b) *Formação de gesso*

Neste caso, como vimos, só interessa fazer o estudo até $m_i = 10$ ou seja $y = 0,494$. A partir dos dados gerais, podem tirar-se imediatamente as conclusões de interesse prático.

1) *Estudo de função* φ (x)

Esta função é crescente e de concavidade voltada para cima para

$$y < \frac{9}{9 + 1,656 \times 2} = 0,73$$

Os valores de r e s são dados no quadro VI

Quadro VI

m_i	y	r	s
1	0,089	1,822	0,813
2	0,164	1,672	0,665
3	0,227	1,546	0,552
4	0,281	1,438	0,409
5	0,329	1,342	0,309
7,5	0,424	1,152	0,109
10	0,494	1,012	— 0,04

A partir destes valores calculam-se pontos das diversas curvas (quadro VII).